

21世纪全国本科院校电气信息类创新型应用人才培养规划教材

信号与系统

张建奇 主编

教材预览、申请样书



微信公众号：pup6book





21世纪全国本科院校电气信息类创新型应用人才培养规划教材

信号与系统

张建奇　主　编

季玉茹　刘红喜　副主编

李　立



内 容 简 介

本书以应用型本科院校学生为授课对象，以“实用”和“够用”为基本原则，将“信号”分析和“系统”分析两个概念分开讲解，在保证基本知识完整的条件下，尽可能减少公式、性质的推导，使学生具备“理解”和“会用”的能力。本书主要内容包括信号的分类与基本特征，系统的基本概念，连续时间系统的时域分析，离散时间系统的时域分析，连续时间信号的频谱，连续时间系统的频域分析，连续时间信号的离散化和采样定理，连续时间信号的拉普拉斯变换，连续时间系统的复频域分析及应用，离散时间信号与系统的 Z 域分析，连续时间系统的状态空间分析。

本书适合作为电子信息、通信类专业及其相关专业的教材，也可供相关技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/张建奇主编．—北京：北京大学出版社，2015.6

（21 世纪全国本科院校电气信息类创新型应用人才培养规划教材）

ISBN 978-7-301-25984-9

Ⅰ.①信…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①信号系统—高等学校—教材　Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 139143 号

书　　名　信号与系统
著作责任者　张建奇　主编
责任编辑　郑　双
标准书号　ISBN 978-7-301-25984-9
出版发行　北京大学出版社
地　　址　北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址　http://www.pup.cn　新浪微博：@北京大学出版社
电子信箱　pup_6@163.com
电　　话　邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62750667
印 刷 者
经 销 者　新华书店
787 毫米×1092 毫米　16 开本　22.75 印张　528 千字
2015 年 6 月第 1 版　2015 年 6 月第 1 次印刷
定　　价　45.00 元

前　　言

本书根据应用型本科的教学要求编写，其目的是使学生更好地理解信号与系统的基本概念，熟悉信号与系统的基本分析方法。

“信号与系统”课程在大学信息工程学科专业课程中的重要性

进入 21 世纪以来，信息产业在生产及科研方面都加快了发展速度，并已成为国民经济发展的支柱产业之一。在千变万化、日新月异的电气工程学科的许多领域的学习中，“信号与系统”是一门基础课程，并且也是学习通信、信号处理和控制工程等课程的先修课程。

人们经常谈论信息、信息处理、信息系统和信息网络等问题，那么信息究竟是什么呢?控制论创始人维纳认为：信息是人和物体与外部世界交换内容的名称。“内容”是事物的原形，“交换”即信息载体将事物原形映射到人或其他物体的感觉器官，人们把这种映射的结果认为获得了“信息”。通俗地说，“信息”指人们得到的“消息”，即原来不知道的知识。

信息的具体表现形式是“信号”。或者说，信息是信号所包含的内容。

表现各种信息的信号都有一个共同点，即信号总是一个或多个独立变量的函数，而这些函数包含某种现象的特征。信号的种类是多种多样的。

所谓系统，就是由若干相互关联又相互作用的事物组合而成的、具有某种特定功能的整体。

在信号与系统课程中将离散时间和连续时间的概念融合在一起显得日益重要。正是本着这样的目的，本书以并行的方式建立了连续时间和离散时间信号与系统的分析方法。

要全面掌握“信号与系统”这门课，没有一定数量且能应用这些基本方法的练习是不可能的。

本书的基本编写思路

（1）以应用类本院校科学生为主要授课对象，以培养应用型人才为基本目的。

（2）以“实用、适用、够用”为基本原则。“实用”是指对本课程涉及的基本原理、基本性质、基本方法要讲全并讲透，概念要准确清晰。“适用”是指适用于授课对象，即应用型人才。“够用”是指从授课对象的培养目的上达到理论够用，不必追求理论的深度和内容的广度。

（3）编写注重基本概念、基本方法的表述，编写内容上通俗易懂、易教易学、重在原理，压缩烦琐的理论推导。

（4）在保证教材结构体系完整的前提下，注重知识点的讲解，过程简明、清晰且准确。

（5）本书由“连续时间信号与系统”和“离散时间信号与系统”两部分内容组成。为

方便学生理解信号及系统的特性，书中将这两部分内容分开进行讲解。

（6）书中在处理“连续时间信号与系统”和“离散时间信号与系统”的关系上，为了便于学生比较两者在分析方法和性质上的相似之处和不同之处，在编写时并没有安排成上半部分和下半部分，而是将这两部分的内容交叉编写。

本书如何满足课程的基本需要

（1）区分信号域与域的关系。

（2）区分时域与频域的关系。

（3）区分连续时间系统与离散时间系统的关系。

（4）区分理论分析与计算机实践仿真的关系。

（5）理论知识与习题训练的关系。

（6）吸引学生的注意力，书中加入了“知识要点提醒”和“小思考”内容。

（7）注重例题分析思路介绍。

（8）重点与难点及其他知识的关联性的介绍。

为强化与促进学习而设计的结构

（1）强调信号与系统之间的理论核心是信号的分解特性和系统的线性特性，同时建立了两者之间的逻辑联系。这种编写特点可以清晰地揭示出不同系统分析方法的基本思想和内在联系，有利于学生提高综合分析能力并掌握科学方法论。

（2）本书分为“连续时间信号与系统”与“离散时间信号与系统”两部分，既体现了两者在理论上相对独立、内容上相互并行的特点，又遵循了先易后难、循序渐进的原则。

（3）在系统时域分析中，强调系统解法，削弱经典解法，采用算子和传输算子概念描述时域分析法，使时域分析法与变换域分析法之间建立起一定的对应关系。

本书由浙江工业大学之江学院张建奇担任主编，由吉林化工学院季玉茹、长春工程学院刘红喜和安阳工学院李立担任副主编。在本书的编写过程中得到了浙江万里学院张增年、杨亚萍老师，中国计量学院信息工程学院金宁、周小薇老师，杭州电子科技大学马金龙老师，浙江大学城市学院陈琢、乔闪、金晖、李秀梅老师和浙江工业大学之江学院骆崇老师在资料上的帮助并提供了宝贵的修改意见和建议，在此深表谢意。

本书获得“绍兴市重点教材”资助建设项目。

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不当之处，敬请读者批评指正。

编　者

2014 年 12 月

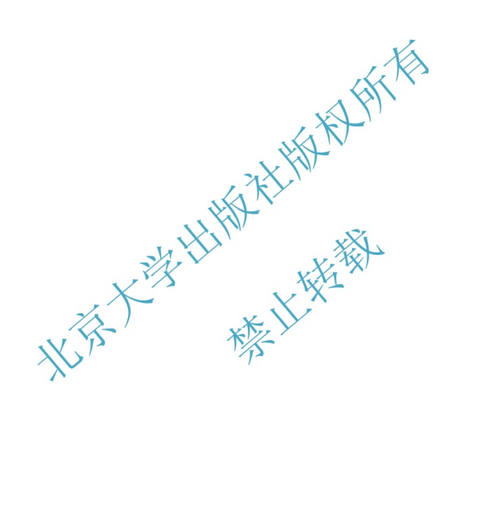


目　　录

第 9 章 连续时间系统复频域分析及应用 …… 231

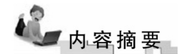
第 10 章 离散时间信号与系统的 Z 域分析 …… 269

第 11 章 连续时间系统的状态空间分析 …… 319



第1章

信号的分类与基本特性



内容摘要

信号分析是电类专业所必须掌握和了解的一个基本概念，信号存在于电类知识的整个过程中。掌握信号的基本概念、描述方法、信号的分类和基本特性是研究信号分析、信号处理和信号传输的基础，同时，也是学好电类课程必不可少的条件。本章主要介绍信号的基本概念、信号的分类、连续时间信号及其特点、离散时间信号及其特点和信号的基本运算。

教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识	工程应用方向
信号分类	了解信号的种类	常见电信号	电信号与非电信号
连续时间信号特点	熟悉信号的特点	连续时间信号	模拟信号
离散时间信号特点	熟悉信号的特点	离散时间信号	数字信号
信号运算	掌握信号的基本运算方法	信号的基本运算方法	信号的通信

教学目标与要求

了解信号的基本概念和分类。

熟悉连续时间信号及其特点。

熟悉离散时间信号及其特点。

掌握信号的基本运算。

1.1 信号的基本概念与分类

1.1.1 信号是指什么

当今世界已进入信息技术时代，在日常生活和社会活动中，信息正无时无刻地影响着人们的生活方式，如人们常用的电脑、手机、卫星通信及GPS全球定位系统和物联网等，图1.1为GPS全球定位系统的示意图。因此，信息是人们交流和交往的一个重要渠道。人们通常把信息的具体表现形式称为信号，即信号是代表信息的物理形式或物理量。信号是信息包含内容的具体形式。从物理概念上，信号是某种随时间变化的信息。从数学上，信号可以定义为传达某种物理现象的一个函数。在不同的场合信号表现的形式也不相同。在“信号与系统”中，重点关注一维的单值函数，尤其要关注其中的电信号。

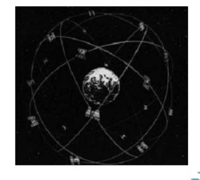


图1.1 GPS示意图

1.1.2 信号有哪些类型

信号的分类方法有多种形式，根据信号研究的领域和应用场合的不同，通常有以下几种分类方式。

1. 连续时间信号和离散时间信号

1）连续时间信号

对任意一个信号，如果在定义域内，除有限个间断点外均有定义，则称此信号为连续时间信号。连续时间信号是指信号的时间是连续的，而幅度既可以是连续的也可以是离散的。

在电工学中，人们还经常用到模拟信号。

模拟信号是指信号的时间是连续的，而且信号的幅度也是连续的。

显然，连续时间信号包含了模拟信号。

2）离散时间信号

离散时间信号是指时间离散的信号，其幅度可以是离散的也可以是连续的。在离散时间信号中包含序列和数字信号。

序列是指时间是离散的且按等间距分布的信号，其幅度可以是连续的也可以是离散的。

数字信号是指时间是离散的且按等间距分布的信号，其幅度也是离散的且是最小量化单位的整倍数。

图1.2为连续时间信号和离散时间信号的波形图。



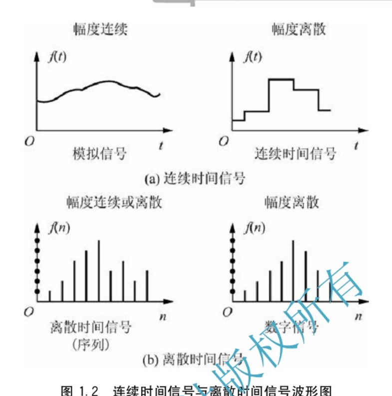


图 1.2　连续时间信号与离散时间信号波形图

2. 确定信号与随机信号

1）确定信号

确定信号是指对某一确定时刻，就有某一确定数值与其对应的信号。确定信号可以表示为时间的函数。图 1.3 所示为一个指数信号波形图，在 t_1 时刻，对应的数值为 $f_1(t)$，在 t_2 时刻，对应的数值为 $f_2(t)$。确定信号往往可以用函数解析式、图表和波形来表示。

2）随机信号

随机信号是指事先无法预测它的变化趋势，也无法预先知道其变化规律的信号。随机信号可以看作属于一个信号集，信号集中每个信号具有不同的波形。图 1.4 所示为随机信号波形图。

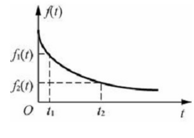


图 1.3　指数信号波形

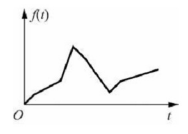


图 1.4　随机信号波形

在实际工作中，系统总会受到各种干扰信号的影响，例如电磁干扰等。这些干扰信号不仅在不同时刻的信号值是互不相关的，而且在任一时刻信号的幅值和相位都是在不断变化的。因此，从严格意义上讲，绝大多数信号都是随机信号，只不过我们在研究信号与系统时，常常忽略一些次要的干扰信号，主要研究占统治地位的信号的性质和变化趋势。本

书主要研究确定信号。

3. 能量信号和功率信号

1) 能量信号

在一个电系统中，信号可以是电压，也可以是电流。

将一个电压或电流信号 $f(t)$ 加到单位电阻上，则在该电阻上产生的瞬时功率为 $|f(t)|^2$，在一段时间 $\left(-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right)$ 内消耗一定的能量，把该能量对时间区域取平均，即得信号在此区间内的平均功率。

对连续时间信号，若将时间区域无限扩展，信号满足条件

$$E=\lim_{\tau\to\infty}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t<\infty \tag{1-1}$$

称为能量信号，即如果一个信号在无限大时间区域内信号的能量为有限值，则称该信号为能量有限信号或能量信号。

能量信号的平均功率为零。

根据能量信号的定义，显然可以得出：确定信号和非周期信号是能量信号。

对离散时间序列，定义

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|^2<\infty \tag{1-2}$$

为能量信号。

2) 功率信号

将时间区域无限扩展，信号满足条件

$$P=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}E<\infty \tag{1-3}$$

称为功率信号，即如果在无限大时间区域内信号的功率为有限值，则称该信号为功率有限信号或功率信号。

功率信号的能量无穷大。

周期信号和随机信号是功率信号。

对离散时间序列，定义

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|f(n)|^2<\infty \tag{1-4}$$

称为功率信号。

平均功率的计算公式为

$$P=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|f(n)|^2 \tag{1-5}$$

【小思考】 在学过的常用信号中，哪些是能量信号？哪些是功率信号？

【例 1.1】 判断下列信号是否为能量信号或功率信号，并求出它们的值。

(1) $f_1(t)=u(t+5)$ (2) $f_2(t)=2\mathrm{e}^{t^2}$

【解题思路与技巧】 先计算能量 E，若为有限值则为能量信号。否则计算功率 P，若



为有限值则为功率信号。否则，两者都不是。

解：(1) 能量

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}(u(t+5))^2\mathrm{d}t=\int_{-5}^{\infty}1\mathrm{d}t=+\infty$$

功率

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-5}^{\frac{T}{2}-5}(u(t+5))^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-5}^{\frac{T}{2}-5}1\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

为功率信号。

(2) 能量

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}(2\mathrm{e}^{t^2})^2\mathrm{d}t=\infty$$

功率

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}(2\mathrm{e}^{t^2})^2\mathrm{d}t=\infty$$

即不是能量信号也不是功率信号。

【例 1.2】 计算图 1.5 所示的矩形脉冲信号的总能量。

【解题思路与技巧】 利用能量信号的定义求解。

解：

$$E=\lim_{\tau\to\infty}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}E^2\mathrm{d}t=E^2T$$

图 1.5　矩形脉冲信号

【例 1.3】 计算图 1.6 所示周期方波信号的平均功率。

【解题思路与技巧】 利用功率信号的定义求解。

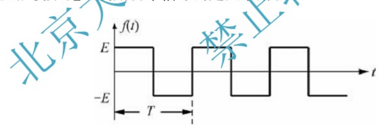


图 1.6　周期方波信号

解：

$$\begin{aligned}P&=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\int_{0}^{\frac{T}{2}}E^2\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{2}}^{T}(-E)^2\mathrm{d}t\right)\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}(E^2T)=E^2\end{aligned}$$

4. 偶信号和奇信号

如果一个连续时间信号 $f(t)$ 满足

$$f(-t)=f(t)\qquad 对所有的\ t \tag{1-6}$$

则称该信号为偶信号。

如果一个连续时间信号 $f(t)$ 满足

$$f(-t)=-f(t) \qquad 对所有的 t \tag{1-7}$$

则称该信号为奇信号。

对于任意信号 $f(t)$ 都可以分解为偶函数分量和奇函数分量的线性组合。

设函数 $f(t)$ 的偶函数分量为 $f_e(t)$，奇函数分量为 $f_o(t)$，则

$$f(t)=f_e(t)+f_o(t) \tag{1-8}$$

可以推出

$$f_e(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2} \tag{1-9}$$

$$f_o(t)=\frac{f(t)-f(-t)}{2} \tag{1-10}$$

【例 1.4】 将 $f(t)=\sin t+\cos t+\cos t\sin t$ 分解成奇函数分量和偶函数分量。

【解题思路与技巧】 利用函数可分解为偶函数分量和奇函数分量的线性组合公式求解。

解：由于偶函数分量

$$f_e(t)=\frac{\{\sin t+\cos t+\sin t\cos t]+[\sin(-t)+\cos(-t)+\sin(-t)\cos(-t)]}{2}$$

$$=\frac{2\cos t}{2}=\cos t$$

同理，奇函数分量

$$f_o(t)=\sin t+\sin t\cos t=\sin t(1+\cos t)$$

【例 1.5】 判断下列信号是偶函数还是奇函数？

$$f(t)=\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) & -T\leqslant t\leqslant T\\ 0 & 其他\end{cases}$$

【解题思路与技巧】 利用函数可分解为偶函数分量和奇函数分量的线性组合公式求解。

解：用 $-t$ 代替 t，可得

$$f(-t)=\begin{cases}\sin\left(-\frac{\pi t}{T}\right) & -T\leqslant t\leqslant T\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) & -T\leqslant t\leqslant T\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$=-f(t)$$

故该信号是奇函数。



1.1.3　周期信号

1. 连续时间周期性信号

1）定义

一个连续时间信号 $f(t)$，若对所有的 t 值均满足条件

$$f(t)=f(t+mT)\qquad m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{1-11}$$

则称为周期信号。满足上式的最小 T 值称为 $f(t)$ 的周期。

不满足周期信号条件的信号为非周期信号。

【知识要点提醒】

两个周期信号相加不一定为周期信号。若这两个信号的周期分别为 T_1 和 T_2，只有当 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{M}{N}$，且 M 和 N 均为正整数或 $\frac{T_1}{T_2}$ 为有理数时，信号才是周期的。

2）两种特殊信号的周期

对于一般信号 $f(t)$ 周期性的判断，通常用定义来判别。但若信号为正弦信号和虚指数信号时，可直接用公式来判断并计算其周期。

当为正弦信号时，设 $f(t)=A\sin\omega_0 t$，由周期信号的定义

$$f(t+T)=A\sin\omega_0(t+T)=A\sin\omega_0(t+T)=A\sin(\omega_0 t+\omega_0 T)=A\sin\omega_0 t=f(t)$$

可见 $\omega_0 T=2k\pi$。当 $k=1$ 时 $\omega_0 T=2\pi$，则 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$。

显然，连续时间正弦信号周期的计算公式为

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0} \tag{1-12}$$

当为虚指数信号时，设 $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$

根据欧拉公式，虚指数可表示为

$$f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}=\cos\omega_0 t+\mathrm{j}\sin\omega_0 t \tag{1-13}$$

【知识要点提醒】

1）虚指数信号的波形是一个正弦周期信号波形。

2）在计算信号周期时，只有正弦信号和虚指数信号的周期可以用

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0} \tag{1-14}$$

计算，其他信号的周期需要用定义来计算。

【例 1.6】 判断下列信号是否为周期信号，若是，求出其周期。

(1) $f(t)=3\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$

(2) $f(t)=\sin^2\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $f(t)=3\sin 5t+2\cos\pi t$

(4) $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3}{4}t}$

(5) $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{1}{2}t-1\right)}$

【解题思路与技巧】 首先利用连续时间信号的周期计算定义或公式求周期 T，若存在周期 T，即为周期信号，否则为非周期信号。

解：(1) $f(t)=3\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$

因为 $\omega_0=3$,则 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{3}$,故该函数是周期信号，周期为 $\frac{2\pi}{3}$。

(2) $f(t)=\sin^2\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

因为 $\omega_0=2$,则 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故该函数是周期信号，周期为 π。

(3) $f(t)=3\sin 5t+2\cos\pi t=f_1(t)+f_2(t)$

因为 $\omega_1=5$,有 $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{2\pi}{5}$;$\omega_2=\pi$,有 $T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，则 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{\pi}{5}$，因为$\frac{M}{N}$不为正整数，故该函数不是周期信号。

(4) $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3}{4}t}$

因为 $\omega_0=\frac{3}{4}$,则 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{8\pi}{3}$，故该函数是周期信号，周期为$\frac{8\pi}{3}$。

(5) $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{1}{2}t-1\right)}$

因为 $\omega_0=\frac{1}{2}$,则 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=4\pi$,故该函数是周期信号,周期为 4π。

2. 离散时间周期信号

对一个离散时间信号 $f(n)$，若对所有的 n 值均满足条件。

$$f(n)=f(n+mN)\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1-15}$$

则称 $f(n)$ 为离散时间周期信号。其中最小的正整数 N 值为信号 $f(n)$ 的周期。

不满足周期信号条件的信号为非周期信号。

【知识要点提醒】

与连续时间正弦信号不同，离散时间正弦信号并不一定是周期的，这是由于在离散时间信号中自变量 n 的取值是整数，故信号的周期 N 也一定为整数，而对任意一个正弦信号并不一定总能找到满足要求的正整数 N。

即对离散时间信号而言，只有当 m 和 N 均为正整数，信号才是周期的。

与连续时间信号类似，离散时间正弦信号和复指数信号周期性判断及计算公式为

$$N=k\frac{2\pi}{\omega_0} \tag{1-16}$$





当 k 取整数，使得 N 为整数时，信号就一定是周期的。

【小思考】 对于非正弦和虚指数信号，如何判断其周期性？

【例 1.7】 判断下列信号是否为周期信号，若是，求出其周期。

(1) $f(n)=5\cos\left(\frac{4\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)$

(2) $f(n)=e^{j\frac{6}{5}\pi n}$

(3) $f(n)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}[\delta(n-7m)-\delta(n-3-7m)]$

【解题思路与技巧】 计算信号的周期，如果是正弦信号和复指数信号，可以直接利用公式 $N=k\frac{2\pi}{\omega_0}$ 计算，若是其他信号，可用周期信号的定义来证明其周期性。

解：(1) $f(n)=5\cos\left(\frac{4\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)$

因为 $\omega_0=\frac{4\pi}{3}$，则 $N=k\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)=k\left(\frac{2\pi}{4\pi}\times 3\right)=k\left(\frac{3}{2}\right)$，当 $k=2$ 时，$N=3$，故 $f(n)$ 是周期信号。

(2) $f(n)=e^{j\frac{6\pi}{5}n}$

因为 $\omega_0=\frac{6\pi}{5}$，则 $N=k\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)=k\left(\frac{2\pi}{6\pi}\times 5\right)=k\left(\frac{5}{3}\right)$，当 $k=3$ 时，$N=5$，故 $f(n)$ 是周期信号。

(3) $f(n)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}[\delta(n-7m)-\delta(n-3-7m)]$

由定义 $$f(n)=f(n+N)$$

$$f(n+N)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\delta(n+N-7m)-\delta(n+N-3-7m)]$$

$$\underline{\underline{令\ N=7k}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\delta(n+7k-7m)-\delta(n+7k-3-7m)]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\delta(n+7(k-m))-\delta(n-3+7(k-m))]$$

$$\underline{\underline{令\ k-m=p}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\delta(n-7p)-\delta(n-3-7p)]=f(n)$$

可见 $f(n)$ 是周期信号，当 $k=1$ 时，$N=7$。

1.2　两种常用的连续时间特殊信号

1. 连续时间阶跃信号

连续时间阶跃信号的定义

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases} \tag{1-17}$$

阶跃信号的波形如图 1.7 所示。

【知识要点提醒】 单位阶跃信号在 $t=0$ 这一点是不连续的。

经时移后

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\0 & t<t_0\end{cases} \tag{1-18}$$

其波形如图 1.8 所示。

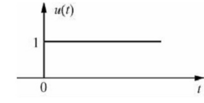


图 1.7 阶跃信号波形图

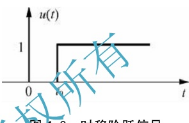


图 1.8 时移阶跃信号

2. 阶跃信号的用途

在实际应用中，阶跃信号是一个非常有用的信号，下面举例说明。

1) 阶跃信号可以确定信号的起点和区间

【例 1.8】 画出下列信号的波形。

(1) $f_1(t)=(t-t_0)u(t)$

(2) $f_2(t)=(t-t_0)u(t-t_0)$

(3) $f_3(t)=t[u(t-1)-u(t-3)]$

【解题思路与技巧】 在画 $y(t)=f(t)u(t)$ 这类信号波形时，首先画出 $f(t)$ 的波形，然后再由 $u(t-t_0)$ 和 $u(t-t_1)-u(t-t_2)$ 来确定波形的起点和区间。

解：(1) 信号 $f_1(t)=(t-t_0)$ 的起点从 $t=0$ 开始，波形如图 1.9(a)所示。

(2) 信号 $f_2(t)=(t-t_0)$ 的起点从 $t=t_0$ 开始，波形如图 1.9(b)所示。

(3) 信号 $f_3(t)=t$ 的区间从 $t=1$ 到 $t=3$，波形如图 1.9(c)所示

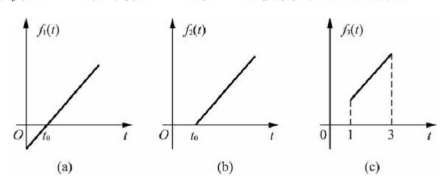


图 1.9 例 1.8 题波形图



2）阶跃信号可以将分段函数表达式写成封闭式函数表达式

【例 1.9】 画出下列信号 $f(t)$ 的波形，并写出封闭式表达式

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<1\\ -1 & 1<t<3\\ 2 & 3<t<4\\ 0 & t>4\end{cases}$$

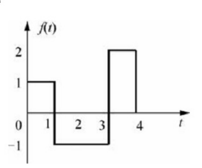


图 1.10　例 1.9 题波形图

【解题思路与技巧】 在分段表示的函数中，其每一段的幅值即是该段的 $f(t)$，分段的区间用 $u(t-t_0)-u(t-t_1)$ 来表示。

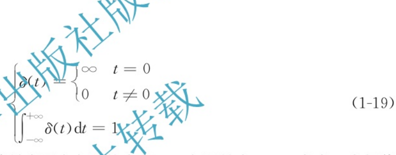
解：信号的波形如图 1.10 所示。

其封闭表达式为

$$\begin{aligned}f(t)&=[u(t)-u(t-1)]-1[u(t-1)-u(t-3)]+2[u(t-3)-u(t-4)]\\&=u(t)-2u(t-1)]+3u(t-3)-2u(t-4)\end{aligned}$$

3. 连续时间单位冲激信号

连续时间冲激信号的定义



$$\begin{cases}\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1\end{cases}\tag{1-19}$$

【知识要点提醒】 单位冲激信号有两个方面的含义：一方面是在 $t=0$ 点有一个幅值为无穷大的信号，另一方面冲激信号与时间轴覆盖的面积为 1。

冲激信号波形如图 1.11 所示。

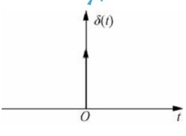


图 1.11　冲激信号

4. 冲激信号的性质

冲激信号在信号的运算过程中非常重要，它可以简化运算过程和运算结果。

1）阶跃信号与冲激信号之间的关系

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\tag{1-20}$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\tag{1-21}$$

2）相加性质

$$a\delta(t)+b\delta(t)=(a+b)\delta(t)\tag{1-22}$$

3）相乘性质

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)\tag{1-23}$$

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)\tag{1-24}$$

4）筛选性质(取样性质)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0) \tag{1-25}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0) \tag{1-26}$$

5）偶函数

$$\delta(t) = \delta(-t) \tag{1-27}$$

6）尺度变换性质

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1-28}$$

$$\delta(at-t_0) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t-\frac{t_0}{a}\right) \tag{1-29}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|a|}f(0) \tag{1-30}$$

7）冲激偶

$$\delta^{(1)}(t) = \frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-31}$$

冲激偶的性质见表 1 - 1。

表 1 - 1　冲激偶的性质

序号	性　　质	序号	性　　质
1	$\delta^{(1)}(at) = \frac{1}{\lvert a\rvert}\frac{1}{a}\delta^{(1)}(t)$	6	$f(t)\delta^{(1)}(t) = f(0)\delta^{(1)}(t) - f^{(1)}(0)\delta(t)$
2	$\delta^{(n)}(at) = \frac{1}{\lvert a\rvert}\frac{1}{a^n}\delta^{(n)}(t)$	7	$f(t)\delta^{(1)}(t-t_0) = f(t_0)\delta^{(1)}(t-t_0) - f^{(1)}(t_0)\delta(t-t_0)$
3	$\delta^{(n)}(-t) = (-1)^n\delta^{(n)}(t)$	8	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta^{(1)}(t)\mathrm{d}t = -f^{(1)}(0)$
4	$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(1)}(t)\mathrm{d}t = 0$	9	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta^{(n)}(t)\mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(0)$
5	$\int_{-\infty}^{t} \delta^{(1)}(t)\mathrm{d}t = \delta(t)$	10	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta^{(n)}(t-t_0)\mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(t_0)$

【小思考】　如何利用冲激信号计算表达式的值？

下面举例说明。

【例 1.10】　计算下列各式的值。

(1) $(t^3+3t^2+2)\delta(t-3)$　　(2) $\mathrm{e}^{-2t}\delta(3t+3)$　　(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos t\,\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2t}\delta'(t-3)\mathrm{d}t$　　(5) $\mathrm{e}^{-2t}u(t)\delta(t+2)$

【解题思路与技巧】　利用冲激信号和冲激偶信号的性质计算。

解：(1) $(t^3+3t^2+2)\delta(t-3) = (3^3+3\times3^2+2)\delta(t-3) = 56\delta(t-3)$



(2) $e^{-2t}\delta(3t+3)=e^{-2t}\dfrac{1}{3}\delta(t+1)=\dfrac{1}{3}e^{2}\delta(t+1)$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos t\delta\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2t}\delta'(t-3)\mathrm{d}t=2e^{-6}$

(5) $e^{-2t}u(t)\delta(t+2)=0$

1.3　离散时间基本信号

如果一个信号的函数值仅在自变量离散时间点上有定义，则该信号称为离散时间信号。离散时间信号相邻离散时间点的间隔可以是相等的，也可以是不相等的，在这些离散时间点之外，信号无定义。

图 1.12 表示一个离散时间信号：

$$y(n)=\begin{cases}n & n=1,2,3\\1 & n=-1,-2\end{cases}\tag{1-32}$$

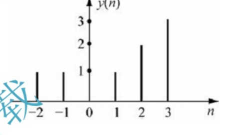


图 1.12　离散时间信号

1. 单位阶跃序列

离散时间的单位阶跃序列的定义



$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\0 & n<0\end{cases}\tag{1-33}$$

其波形如图 1.13 所示。

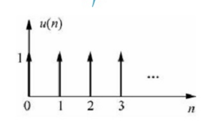


图 1.13　单位阶跃序列波形

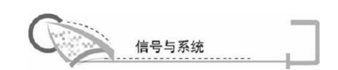
【知识要点提醒】 单位阶跃序列 $u(n)$ 与单位阶跃信号 $u(t)$ 是相对应的，但它们之间有明显的区别，$u(n)$ 在 $n=0$ 点处的定义值为 1，而 $u(t)$ 在 $t=0$ 处是不连续的。

2. 单位脉冲序列

离散时间的单位脉冲序列的定义

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\0 & n\neq 0\end{cases}\tag{1-34}$$

其波形如图 1.14 所示。



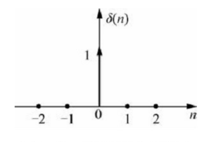


图 1.14　单位脉冲序列波形

3. 离散时间的单位脉冲序列的性质

1）取样性质

单位脉冲序列只有在 $n=0$ 点，$\delta(n)$ 才等于 1，其余各点均为零，与连续时间单位冲激信号类似，故

$$f(n)\delta(n) = f(0)\delta(n) \tag{1-35}$$

$$f(n)\delta(n-k) = f(k)\delta(n-k) \tag{1-36}$$

2）单位阶跃序列与单位脉冲序列之间的关系

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) = \nabla u(n) \tag{1-37}$$

$$u(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} \delta(i) \tag{1-38}$$

【小思考】　连续时间系统的冲激响应和阶跃响应与离散时间系统的单位阶跃序列和脉冲序列在定义和性质上有何异同?

1.4　连续时间信号的基本运算

1.4.1　信号的相加与相乘

1. 信号的相加

两个连续时间信号在任意时刻的相加值，等于两信号在该时刻信号值对应点之和。

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \tag{1-39}$$

波形如图 1.15 所示。

2. 信号的相乘

两个连续时间信号在任意时刻的相乘值，等于两信号在该时刻信号值对应点之乘积。

$$f(t) = f_1(t)f_2(t) \tag{1-40}$$



波形如图 1.16 所示。

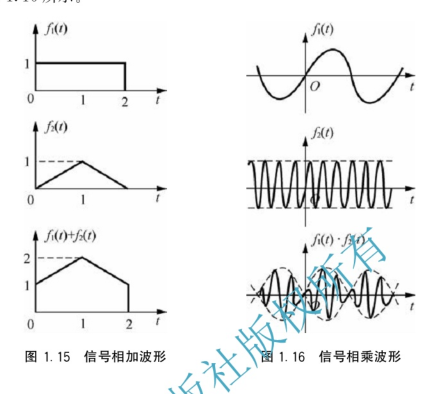


图 1.15 信号相加波形 图 1.16 信号相乘波形

1.4.2 信号的平移、翻转和展缩

1. 信号的平移

已知信号 $f(t)$ 的波形，画出 $f(t+t_0)$ 的波形。如果 $t_0>0$，信号将 $t=0$ 点向左平移到 $t=-t_0$，因此信号向左平移。与此类似，如果 $t_0<0$，信号向右平移 t_0 个单位。波形如图 1.17 所示。

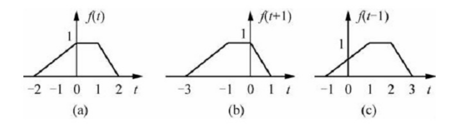


图 1.17 信号的平移波形

2. 信号的翻转

若已知信号 $f(t)$ 波形，画出 $f(-t)$ 的波形。将 $f(t)$ 信号绕纵轴翻转 180°，即可得 $f(-t)$ 波形。波形如图 1.18 所示。

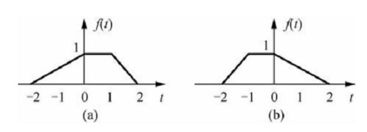


图 1.18　信号的翻转波形

3. 信号的展缩

若已知信号 $f(t)$ 的波形，画出 $f(at)$ 的波形。将 $f(t)$ 的波形沿 t 轴进行展缩。若 $a>1$，将 $f(t)$ 的波形以坐标原点为中心，沿 t 轴压缩为原来的 $\frac{1}{a}$。若 $0<a<1$，将 $f(t)$ 的波形以坐标原点为中心，沿 t 轴展宽为原来的 $\frac{1}{a}$。

图 1.19 分别给出了 $a=2$ 和 $a=\frac{1}{2}$ 时 $f(t)$ 波形的展缩情况。

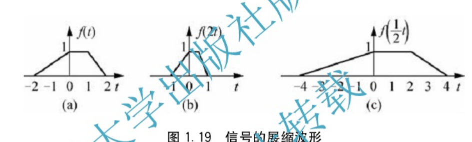


图 1.19　信号的展缩波形

【小思考】 若信号 $f(t)$ 先压缩 a 倍，再扩展 a 倍，能否得到原先的 $f(t)$？

4. 信号的平移、翻转和展缩组合变换

当信号需要进行平移、翻转和展缩变换时，变换的顺序没有统一规定，这里对初学者给出一个基本的变换步骤。

(1) 若由信号 $f(t)$ 的波形画出 $f(at+b)$ 的波形，可按照先翻转，后展缩，再平移的步骤。

(2) 若由信号 $f(at+b)$ 的波形画出 $f(t)$ 的波形，可按照先平移，后展缩，再翻转的步骤。

(3) 若由信号 $f(mt+n)$ 的波形画出 $f(at+b)$ 的波形，可先由信号 $f(mt+n)$ 的波形画出 $f(t)$ 的波形，再由 $f(t)$ 的波形，画出 $f(at+b)$ 的波形。

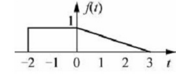


图 1.20　例 1.12 题波形图

【知识要点提醒】 一般来说，当已知信号 $f(t)$ 的波形，要求画出 $f(at+b)$ 的波形，需要进行波形的平移、翻转 ($a<0$) 和展缩变换。此时，波形变换的顺序并无统一的规定，无论采用何种变换顺序，均可以得到相同的结果。

【例 1.12】 已知 $f(t)$ 信号的波形如图 1.20 所示，画出



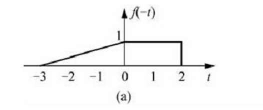
$f(4-t)$ 的波形。

【解题思路与技巧】 对于波形变换，变换的顺序没有统一规定，下面用两种方法变换，可以做比较。

方法 1：先翻转，后平移(右移)

$$f(t) \to f(-t) \to f[-(t-4)] = f(4-t)$$

变换波形如图 1.21 所示。



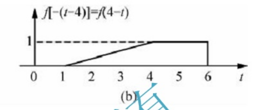
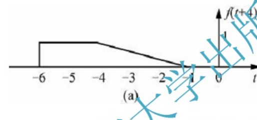


图 1.21　例 1.12 题波形图

方法 2：先平移(左移)，后翻转

$$f(t) \to f(4+t) \to f(4-t)$$

变换波形如图 1.22 所示。



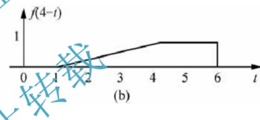


图 1.22　例 1.12 题变换波形图

【例 1.13】 已知 $f(t)$ 信号的波形如图 1.23 所示，画出 $f(8-2t)$ 的波形。

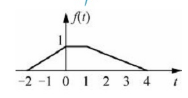


图 1.23　例 1.13 题波形图

【解题思路与技巧】 同例 1.12。

解：先翻转，后展缩，再平移

$$f(t) \to f(-t) \to f(-2t) \to f[-2(t-4)] = f(8-2t)$$

变换波形如图 1.24 所示。

【例 1.14】 已知信号 $f(2t+4)$ 的波形如图 1.25 所示，画出 $f(4-2t)$ 的波形。

【解题思路与技巧】 先由 $f(2t+4)$ 求出 $f(t)$，然后再由 $f(t)$ 求出 $f(4-2t)$。

解：先求 $f(t)$，再求 $f(4-2t)$。

(1) 先时移(右移)，后展缩，再翻转

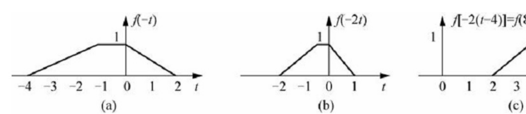


图 1.24　例 1.13 题变换波形图

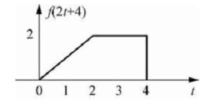


图 1.25　例 1.14 题波形图

$$f(2t+4)=f[2(t+2)]\xrightarrow{\text{右移 2}}f(2t)\xrightarrow{\text{扩展 1 倍}}f(t)$$

变换波形如图 1.26 所示。

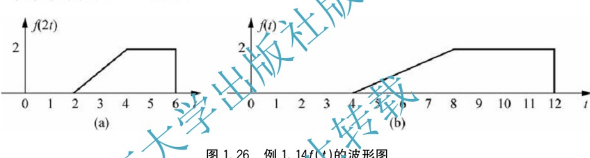


图 1.26　例 1.14$f(t)$的波形图

(2) 先翻转，后展缩，再平移

$$f(t)\xrightarrow{\text{翻转}}f(-t)\xrightarrow{\text{压缩 1 倍}}f(-2t)\xrightarrow{\text{右移 2}}f[-2(t-2)]=f(4-2t)$$

变换波形如图 1.27(a)、(b)、(c)所示。

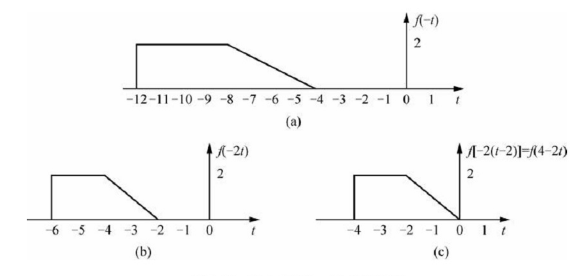


图 1.27　例 1.14$f(4-2t)$的波形图



1.4.3　信号的微分和积分运算

1. 信号的微分

信号对 $f(t)$ 的微分运算是指 $f(t)$ 对 t 求导

$$f'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \tag{1-41}$$

【知识要点提醒】 在做微分运算时应特别注意：在一般情况下，函数在间断点处的导数是不存在的。

【例 1.15】 图 1.28 给出了信号 $f(t)$ 的波形，画出其微分运算波形图。

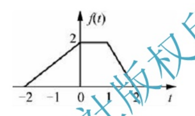


图 1.28　例 1.15 题波形图

【解题思路与技巧】 画信号的微分波形可以直接从波形上微分，这样做要求对波形的微分比较熟悉。另外，信号波形的微分可以先写出信号波形的表达式，然后求表达式的微分，再画出波形。

解： 信号的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}t+2 & -2<t<0\\ 2 & 0<t<1\\ -2t+4 & 1<t<2\end{cases}$$

经微分运算的表达式为

$$f'(t)=\begin{cases}1 & -2<t<0\\ 0 & 0<t<1\\ -2 & 1<t<2\end{cases}$$

波形如图 1.29 所示。

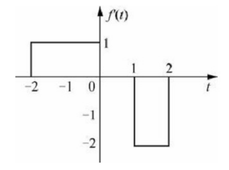


图 1.29　例 1.15$f(t)$微分波形图

2. 信号的积分运算

根据信号积分运算的定义

$$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-42}$$

【知识要点提醒】 其物理意义：在任意时刻 t 的函数值为 $f(t)$ 波形在 $(-\infty,t)$ 区间上所包含的净面积。

【例 1.16】 图 1.28 给出了 $f(t)$ 信号的波形图，画出 $f(t)$ 的积分波形图。

【解题思路与技巧】 与例 1.15 思路类似。

解： 信号的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}t+2 & -2<t<0\\ 2 & 0<t<1\\ -2t+4 & 1<t<2\end{cases}$$

对信号进行积分运算

当 $-2<t<0$ 时，$f^{(-1)}(t)=\int_{-2}^{t}(\tau+2)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}t^2+2t+2$

当 $0<t<1$ 时，$f^{(-1)}(t)=\int_{-2}^{0}(\tau+2)\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{t}2\mathrm{d}\tau=2t+2$

当 $1<t<2$ 时，$f^{(-1)}(t)=\int_{-2}^{0}(\tau+2)\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{1}2\mathrm{d}\tau+\int_{1}^{t}(-2\tau+4)\mathrm{d}\tau$

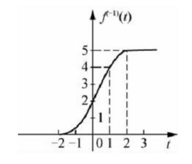
$$=-t^2+4t+1$$

当 $t>2$ 时，$f^{(-1)}(t)=\int_{-2}^{0}(\tau+2)\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{1}2\mathrm{d}\tau+\int_{1}^{2}(-2\tau+4)\mathrm{d}\tau=5$

故

$$f^{(-1)}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2+2t+2 & -2<t<0\\ 2t+2 & 0<t<1\\ -t^2+4t+1 & 1<t<2\\ 5 & t>2\end{cases}$$

其积分波形如图 1.30 所示。



1.30　例 1.16 $f(t)$ 积分波形图



1.5　离散时间信号的运算

1.5.1　离散时间信号的相加与相乘

1. 离散时间信号的相加

离散时间信号的相加等于自变量 n 逐点对应的函数值相加。

$$f(n)=f_1(n)+f_2(n) \tag{1-43}$$

若已知 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 的波形如图 1.31 所示，则 $f(n)$ 的波形如图 1.32 所示。

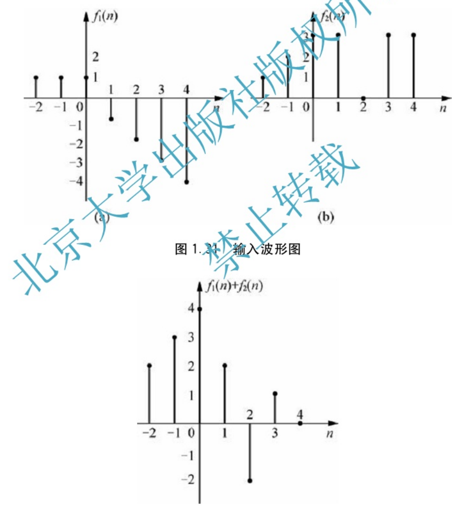


图 1.31　输入波形图

图 1.32　相加波形图

2. 离散时间信号的相乘

离散时间信号的相乘等于自变量 n 逐点对应的函数值相乘。

$$f(n) = f_1(n)f_2(n) \tag{1-44}$$

若已知 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 的波形如图 1.31 所示，则 $f(n)$ 的波形如图 1.33 所示。

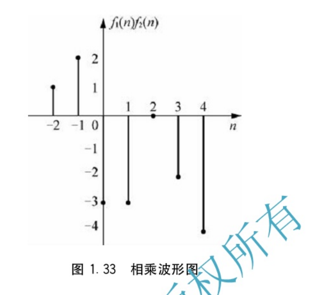


图 1.33　相乘波形图

1.5.2　离散时间信号的翻转、平移和尺度变换

1. 翻转

离散时间信号 $f(n)$ 的翻转是将原信号以纵轴为对称轴翻转180°，即可得到一个新的信号 $f(-n)$，如图 1.34 所示。

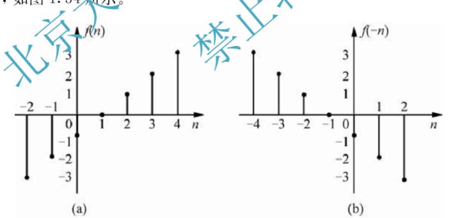


图 1.34　翻转波形图

2. 平移

若离散时间信号用 $f(n)$ 表示，则其平移信号为 $f(n+m)$。当 $m>0$ 时，信号左移，当 $m<0$ 时，信号右移。

图 1.35 给出了 $m=\pm 2$ 时的平移信号。





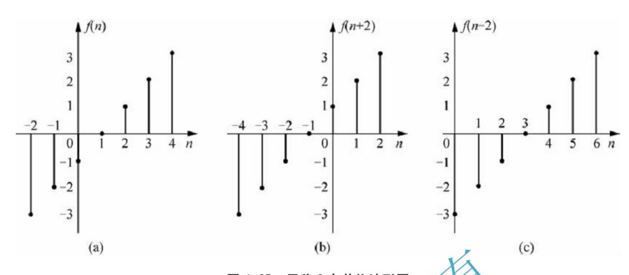


图 1.35　平移 2 个单位波形图

3. 尺度变换

若已知离散时间信号 $f(n)$，其尺度变换序列为 $f(mn)$ 或 $f\left(\frac{n}{m}\right)$，其中 m 为正整数。需要指出的是：它不同于连续时间信号简单的在时间轴上按比例压缩或扩展一倍，而是以 m 为抽样频率抽取或内插。

图 1.36 分别画出了 $m=2$ 和 $m=\frac{1}{2}$ 时的波形。

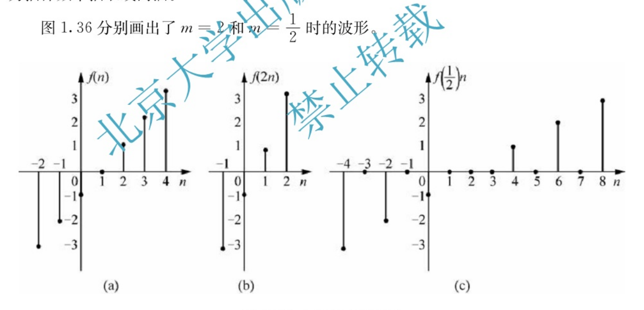
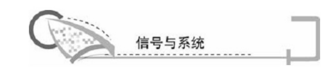


图 1.36　尺度变换波形图

由图 1.36 可以看出，$f(2n)$ 是 $f(n)$ 序列中每两点抽取一点后得到的序列，而 $f\left(\frac{n}{2}\right)$ 是从 $f(n)$ 序列中相邻两抽样点之间插入 1 个零值点后得到的序列。

【小思考】 对离散时间信号 $f(n)$ 先经过频率抽取压缩 m 倍，再经过内插扩展 m 倍，能否得到原先的 $f(n)$？



1.5.3 离散时间信号的差分和累加

1. 离散时间信号的差分

离散时间信号的差分有两种形式：前向差分和后向差分。

前向差分

$$\frac{\Delta f(n)}{\Delta n}=\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n} \quad 或 \quad \Delta f(n)=f(n+1)-f(n) \tag{1-45}$$

后向差分：

$$\frac{\nabla f(n)}{\nabla n}=\frac{f(n)-f(n-1)}{n-n+1} \quad 或 \quad \nabla f(n)=f(n)-f(n-1) \tag{1-46}$$

一阶前向差分

$$\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$$

二阶前向差分

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(n)&=\Delta[\Delta f(n)]=\Delta[f(n+1)-f(n)]\\&=f(n+2)-f(n+1)-f(n+1)+f(n)\\&=f(n+2)-2f(n+1)+f(n)\end{aligned}$$

m 阶前向差分

$$\begin{aligned}\Delta^m f(n)&=\Delta^{m-1}[f(n+1)-f(n)]\\&=f(n+m)+b_{m-1}f(n+m-1)+\cdots+b_0 f(n)\end{aligned} \tag{1-47}$$

注意：式中 $b_{m-1}\sim b_0$ 包含符号。

同理，m 阶后向差分可表示为

$$\nabla^m f(n)=f(n)+b_1 f(n-1)+\cdots+b_m f(n-m) \tag{1-48}$$

【例 1.17】 若已知 $f(n)$ 的波形如图 1.37 所示，画出其前向差分 $\Delta f(n)$ 和后向差分 $\nabla f(n)$的波形。

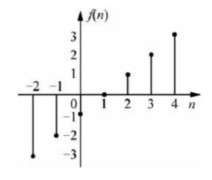


图 1.37 例 1.17 题波形图

【解题思路与技巧】 利用定义画图。

解：$f(n)$ 的前向差分的波形 $\Delta f(n)$ 如图 1.38 所示。





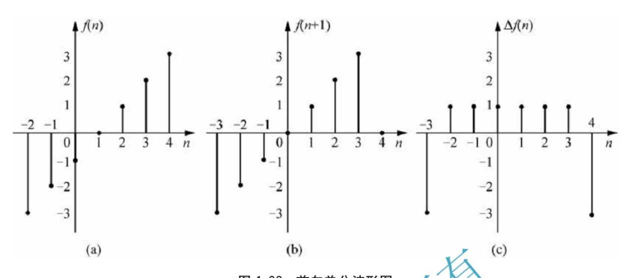


图 1.38　前向差分波形图

同样，后向差分 $\nabla f(n)$ 的波形如图 1.39 所示。

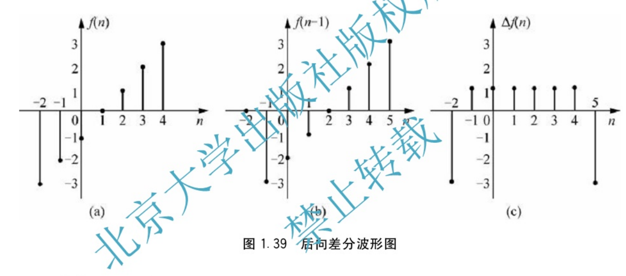


图 1.39　后向差分波形图

2. 离散时间信号的累加

根据连续信号的积分运算的定义

$$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=\lim_{\Delta\tau\to0}\sum_{\tau=-\infty}^{t}f(\tau+\Delta\tau)\Delta\tau$$

在离散信号中，最小间隔 $\Delta\tau=1$，因此可类似定义离散信号的累加运算为

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}f(i) \tag{1-49}$$

【例 1.18】 图 1.40 给出了离散信号 $f(n)$ 的波形图，画出其累加运算 $y(n)$ 的波形图。

【解题思路与技巧】 利用定义画图。

解： 由累加运算的定义

$$y(-2)=0$$

$$y(-1)=f(-2)+f(-1)=y(-2)+f(-1)=-3$$

$$y(0)=f(-2)+f(-1)+f(0)=y(-1)+f(0)=-4$$
$$y(1)=y(0)+f(1)=-4$$
$$y(2)=y(1)+f(2)=-3$$
$$y(3)=y(2)+f(3)=-1$$
$$y(4)=y(3)+f(4)=1$$
$$y(5)=y(4)+f(5)=1$$
$$y(6)=y(5)+f(6)=1$$

因此，$f(n)$的累加运算波形如图 1.41 所示。

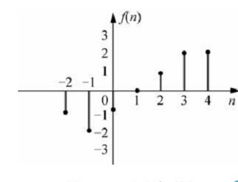


图 1.40　$f(n)$波形图

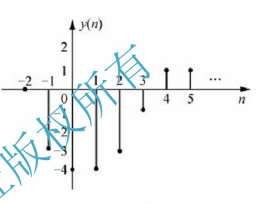


图 1.41　$y(n)$波形图

本章知识要点

1. 信号的基本分类

1） 连续时间信号和离散时间信号

2） 确定信号与随机信号

3） 能量信号和功率信号

能量信号：连续时间信号　$E=\lim\limits_{\tau\to\infty}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t<\infty$

离散时间序列　$E=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}f^2(n)<\infty$

能量信号的平均功率为零。

功率信号：连续时间定义　$P=\lim\limits_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\lim\limits_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}E<\infty$

离散时间序列　$P=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-N}^{N}f^2(n)<\infty$

功率信号的能量无穷大。



4）偶信号和奇信号

偶信号　$f_e(t)=\dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$

奇信号　$f_o(t)=\dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$

5）周期信号和非周期信号

连续时间信号　$f(t)=f(t+mT)$

离散时间信号　$f(n)=f(n+mN)$

对于正弦信号和复指数信号，两者周期分别为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$，$N=k\dfrac{2\pi}{\omega_0}$。

2. 两种常用信号

1）阶跃信号 $u(t)$ 和阶跃序列 $u(n)$

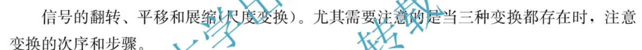
主要用来确定信号的区间范围。

2）冲激信号和单位脉冲序列

通过性质计算信号的表达式。

3. 信号的基本运算

信号的翻转、平移和展缩(尺度变换)。尤其需要注意的是当三种变换都存在时，注意变换的次序和步骤。



信号的微分(差分)和积分(累加)的运算。

习题 1

1.1　判断下列信号是能量信号还是功率信号，并计算其总能量或平均功率。

(1) $f(t)=\begin{cases}t & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 2-t & 1<t\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(2) $f(n)=\begin{cases}n & 0\leqslant n\leqslant 5\\ 10-n & 5<t\leqslant 10\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(3) $f(t)=5\cos(\pi t)+\sin(5\pi t)\quad -\infty<t<\infty$

(4) $f(t)=\begin{cases}5\cos(\pi t) & -1\leqslant t\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(5) $f(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$

(6) $f(n)=\begin{cases}\cos(\pi n) & -4\leqslant n\leqslant 4\\ 0 & 其他\end{cases}$

1.2　计算图 1.42 所示三角波信号的平均功率。

1.3　计算图 1.43 所示离散时间信号的总能量。

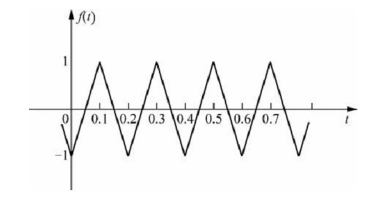


图 1.42　题 1.2 图

图 1.43　题 1.3 图

1.4　求下列信号的偶函数分量和奇函数分量。

(1) $f(t)=1+t+3t^2+5t^3+9t^4$

(2) $f(t)=1+t\cos t+t^2\sin t+t^3\sin t\cos t$

(3) $f(t)=(1+t^3)\cos^3(10t)$

1.5　求信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\cos t$ 的偶函数分量和奇函数分量。

1.6　画出下列信号的波形图。

(1) $f_1(t)=(2-2\mathrm{e}^{-t})u(t)$　　(2) $f_2(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$

(3) $f_3(t)=\mathrm{e}^{-t}u(\cos t)$　　(4) $f_4(t)=\cos 2\pi t[u(t-1)-u(t-3)]$

(5) $f_5(t)=4u(t+2)-u(t)-2u(t-1)+2u(t-3)$

(6) $f_6(t)=\sin\pi t[u(5-t)-u(-t)]$

1.7　确定下列信号是否为周期信号，若是，求出其周期。

(1) $f_1(t)=A\cos\left(4t+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2) $f_2(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}5t}$

(3) $f_3(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t+1}$　　(4) $f_4(t)=\cos^2 4t$

(5) $f_5(t)=\cos 10t-\cos 30t$　　(6) $f_6(t)=3\sin 2t+4\cos\pi t$

(7) $f_7(t)=\cos^2(2\pi t)$　　(8) $f_8(t)=\sin^2(2t)$

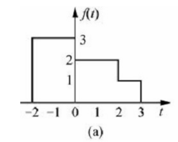
(9) $f_9(t)=\mathrm{e}^{-2t}\cos^2(2\pi t)$　　(10) $f_{10}(t)=\left[\sin\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^2$

1.8　写出图 1.44 中各信号的解析表达式。

1.9　计算下列各式的值。

(1) $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t^2}\delta(t-10)\mathrm{d}t$　　(2) $f(t)=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t^2}\delta(t+10)\mathrm{d}t$





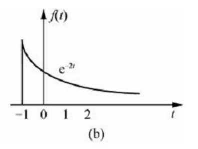


图 1.44　题 1.8 图

1.10　计算下列各题。

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}\delta(t)]$　　(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}u(t)]$

(3) $\mathrm{e}^{-4t}\delta(2+2t)$　　(4) $\mathrm{e}^{-5t}\delta(t+2)$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}[\delta(t)-\delta(t-t_0)]\mathrm{d}t$　　(6) $\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}[\delta(\tau)+\delta^{(1)}(\tau)]\mathrm{d}\tau$

(7) $\int_{-5}^{5}(2t^2+t-5)\delta(3-t)\mathrm{d}t$　　(8) $\int_{-1}^{5}\left(t^2+t-\sin\frac{\pi}{4}t\right)\delta(t+2)\mathrm{d}t$

(9) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+t+1)\delta\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$

1.11　已知 $f(t)=(t^2+4)u(t)$，计算 $f''(t)$。

1.12　信号 $f(t)$ 的波形如图 1.45 所示，试画出下列信号的波形。

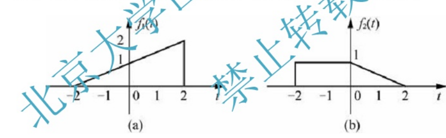


图 1.45　题 1.12 图

(1) $f_1(2t-1)$　　(2) $f_2(-2t-2)$

(3) $f_1(2-t)$　　(4) $f_2(t+2)u(-t)$

(5) $f_1\left(2-\frac{1}{2}t\right)$　　(6) $f_2\left(\frac{1}{2}t-2\right)$

(7) $f_1(2t)+f_2(t-1)$　　(8) $f_1(2t-1)f_2(t+1)$

1.13　已知信号 $f(t)$ 如图 1.46 所示，画出下列信号的波形图。

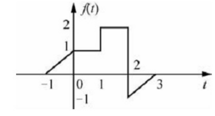


图 1.46　题 1.13$f(t)$波形图

(1) $f(1-t)$　　(2) $f(2t+2)$　　(3) $f\left(2-\frac{t}{3}\right)$

(4) $f(2-t)u(1-t)$　　(5) $[f(t)+f(2-t)]u(1-t)$

1.14　信号 $f(t)$ 波形如图 1.47 所示，试画出 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 和 $\frac{d}{\mathrm{d}t}f(t)$ 的波形图。

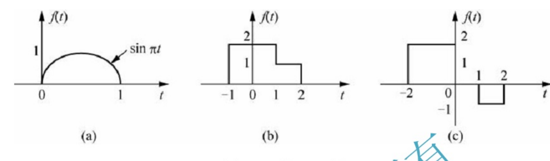


图 1.47　题 1.14 图

1.15　已知信号 $f(t+1)$ 的波形如图 1.48 所示，试画出 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f\left(\frac{1}{2}t+1\right)\right]$ 的波形图。

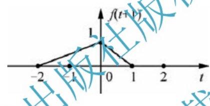


图 1.48　题 1.15 图

1.16　画出下列信号的波形图。

(1) $f_1(n)=n^2[u(n+3)-u(n-3)]$　　(2) $f_2(n)=2^{(1-n)}u(n-1)$

(3) $f_3(n)=(-1)^n u(n-2)$　　(4) $f_4(n)=\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)[u(n)-u(n-7)]$

(5) $f_5(t)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n & n\geqslant 0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & n<0\end{cases}$

1.17　写出图 1.49 所示各信号的解析表达式。

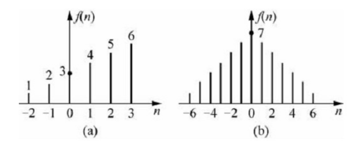


图 1.49　题 1.17 图

1.18　判断下列信号是否为周期信号，若是周期信号，确定信号的周期。

(1) $f(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{2}-\pi\right)}$　　(2) $f(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}n-\pi\right)}$



(3) $f(n)=A\cos\left(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8}\right)$　　　(4) $f(t)=A\cos\omega_0 t\cdot u(t)$

(5) $f(n)=\cos\left(\frac{n}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$　　　(6) $f(n)=(-1)^n$

(7) $f(n)=\cos 2n$　　　(8) $f(n)=\cos 2\pi n$

(9) $f(n)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\{\delta[n-3m]-\delta[n-1-3m]\}$

1.19　两个离散时间正弦信号为 $f_1(n)=\sin(5\pi n)$，$f_2(n)=\sqrt{3}\cos(5\pi n)$。

求：(1) $y(n)=f_1(n)+f_2(n)$ 的周期。

(2) 将 $y(n)$ 写成 $y(n)=A\cos(\omega_0 n+\varphi)$ 的形式。

1.20　某离散时间信号为 $f(n)=\begin{cases}1 & n=1,2\\ -1 & n=-1,-2\\ 0 & 其他\end{cases}$，求 $y(n)=f(2n+3)$。

1.21　已知离散信号 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 的波形如图 1.50 所示，试画出下列信号的波形图。

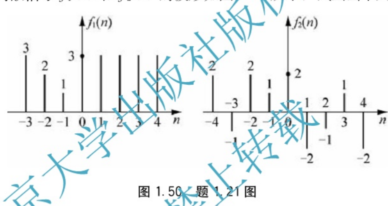


图 1.50　题 1.21 图

(1) $f_1(n-2)$　　　(2) $f_2(n-2)u(n+1)$

(3) $f_1(n+2)[u(n+1)-u(n-3)]$　　　(4) $f_2(-2n-4)$

(5) $f_1(n+1)+f_2(-2n)$　　　(6) $f_1(n)+f_2(2n)$

(7) $f_1(n-2)f_2(n-1)$

1.22　已知 $f(n)$ 的波形如图 1.51 所示，画出其前向差分 $\Delta f(n)$ 和后向差分 $\nabla f(n)$ 波形图。

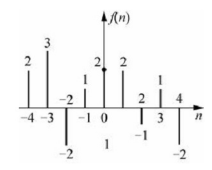


图 1.51　题 1.22 图

1.23　已知 $f(n)$ 的波形如图 1.51 所示，画出其累加信号 $y(n)$ 的波形图。

第2章

系统的基本概念



内容摘要

系统与信号是两个相互联系且不可分割的一个整体，系统的特性往往是通过信号的某种形式反映出来，而信号只有在系统中才有意义。本章主要介绍连续时间系统、离散时间系统的基本概念，系统的框图表示方法以及连续时间系统、离散时间系统的性质。



教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识	工程应用方向
系统	熟悉系统的分类	常见电系统	系统分析
系统的框图	掌握系统框图的画法	系统方程与框图的关系	系统的信号流图与系统稳定性
系统的性质	掌握系统的特点	电系统特性	分析系统稳定性



教学目标与要求

了解系统的基本概念。

掌握系统的框图表示。

掌握系统的基本特性。

2.1　系统

2.1.1　系统的含义

在系统理论中，系统是指由若干相互联系的事物组合而成并且具有特定功能的整体。它包括电子、机械等物理实体，也包括社会、经济等非物理实体。系统可以定义为能对信号进行控制和处理以实现某种特定功能的整体。在本课程中，我们主要研究以电信号为基础的物理实体。在日常生活中，电系统所包含的范围涉及所有学习的课程，从简单的 RC 电路网络、各种放大器音响系统、教学楼的电力配电系统到互联网系统等，都是属于系统，

系统的基本作用是对输入信号进行采集、放大和处理，将其转换成需要的输出信号。图 2.1 说明了信号与系统之间的相互关系。



图 2.1　系统的表示

图中 $f(t)$ 为输入信号或激励，$y(t)$ 为输出信号或响应，系统可以是放大器、滤波器或其他信号处理装置。响应是激励和系统共同作用的结果，激励是引起响应的外部因素，而系统则是引起响应的内部原因。显然，对于相同的输入信号(或激励)，加入的系统不同，得到的响应也不相同。

通常情况下，一个实用系统可以由一个独立系统组成，也可以由若干个独立的子系统组成，这些子系统的各个独立特性构成整个系统的特性，因此对系统的研究显得尤其重要。

2.1.2　系统的分类

系统的分类方法有多种，通常按照数学描述上的差异将其分为不同的系统。

1. 连续时间系统、离散时间系统和混合系统

如果系统的输入信号、输出信号和系统的状态变量都是连续时间的，则称该系统为连续时间系统。

连续时间系统如图 2.2 所示。

如果系统的输入信号、输出信号和系统的状态变量都是离散时间的，则称该系统为离散时间系统。



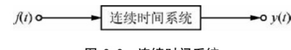


图 2.2　连续时间系统

离散时间系统如图 2.3 所示。

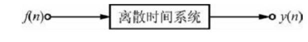


图 2.3　离散时间系统

通常研究的离散时间系统就是数字系统。数字系统可以看作离散时间系统的一个子类。

如果系统的输入信号是连续时间的、输出信号是离散时间的，或输入信号是离散时间的，而输出信号是连续时间的，则称该系统为混合系统。

混合系统如图 2.4 所示。

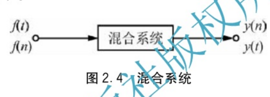


图 2.4　混合系统

2. 单输入单输出系统和多输入多输出系统

若系统只有一个输入一个输出，则系统称为单输入单输出(SISO)系统。图 2.4 就是一个单输入单输出系统。

若系统中有多个输入多个输出系统，则称为多输入多输出(MIMO)系统。多输入多输出系统如图 2.5 所示。

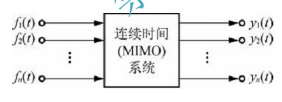


图 2.5　MIMO 系统

3. 一维系统和多维系统

一维系统是指输入信号和输出信号都是一维的，即只有一个自变量的信号。图 2.3 就是一个一维系统。

多维系统是指输入信号或输出信号是多维的(即有多个自变量)。多维系统如图 2.6 所示。

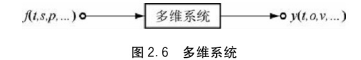


图 2.6　多维系统



2.1.3　连续时间系统的描述

描述一个系统，不论系统内部的结构如何，均可以将系统看成一个黑盒子，我们只需要研究或描述(写出)系统的输入与输出之间的关系。

连续时间系统通常用输入—输出微分方程来描述，下面举一个例子来说明。

【例 2.1】 图 2.7 为一个由电路组成的简单系统，$i(t)$ 为激励信号，$u(t)$ 为响应信号，写出该系统的输入—输出关系。

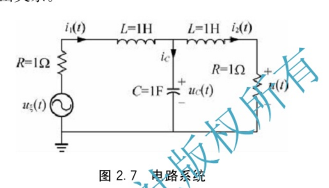


图 2.7　电路系统

【解题思路与技巧】 列系统的微分方程要利用电容、电感的电流电压关系和基尔霍夫定律，写出电路方程，即可解出电路的微分方程。

解： 由 KCL 和 KVL 可列出方程

$$i_c(t) = i_1(t) - i_2(t)$$

$$Ri_1(t) + L\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = u_S(t)$$

$$-u_C(t) + L\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$$

考虑到

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

代入参数，整理解得

$$\frac{\mathrm{d}^3u(t)}{\mathrm{d}t^3} + 2\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = \frac{1}{2}u_S(t)$$

由此可见，对于一个三阶系统，可以用一个三阶微分方程来描述其输入—输出关系。

众所周知，求解三阶微分方程，需要给定三个初始条件 $u(0)$ 、$u'(0)$ 和 $u''(0)$。同理，对于一个 n 阶系统，可以用一个 n 阶微分方程来描述其输入—输出关系，对于 n 阶微分方程，写成一般形式

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t) \tag{2-1}$$

式中：$f(t)$ 是系统的激励信号，$y(t)$ 是系统的响应信号，若要求解一个 n 阶微分方程，需要 n 个初始条件 $y(0)$，$y'(0)$，$y^{(2)}(0)$，…，$y^{(n-1)}(0)$。

对于该方程的求解方法，我们将在后面加以讲述。

2.1.4 离散时间系统的描述

对于离散时间系统，通常用差分方程来描述其输入输出之间的关系。下面以一个实际例子加以说明。

【例 2.2】 图 2.8 是一个电阻梯形网络，各节点对地的电压为 $u(n)$。列出该电路的方程。

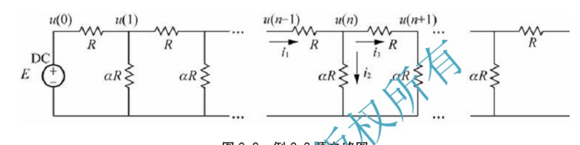


图 2.8 例 2.2 题电路图

【解题思路与技巧】 利用电路原理列出电路方程。

解： 根据 KCL，节点 n 有 $i = i_2 + i_3$，可列出方程

$$\frac{u(n-1)-u(n)}{R} = \frac{u(n)}{\alpha R} + \frac{u(n)-u(n-1)}{R}$$

整理可得

$$\alpha u(n+1) - (2\alpha+1)u(n) + \alpha u(n-1) = 0$$

从本例中可见，这是一个二阶差分方程。

对于一个离散时间系统，系统输出输入之间的关系组成的方程称为差分方程，本系统方程为二阶差分方程，方程的未知序列项为二阶，其系数为常数，故该方程为二阶常系数线性差分方程。

同理，当未知序列项的阶数为 n 阶，且其系数为常数时，称其为 n 阶常系数线性差分方程。其一般表达式为

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j f(n-j) \tag{2-2}$$

同样，若要求解一个 n 阶差分方程，也需要 n 个初始条件 $y(0)$，$y(-1)$，$y(-2)$，…，$y(-n+1)$。

2.2 系统的框图表示

系统特性的描述除了采用数学模型之外，还有另一种描述形式——系统框图描述。系统框图是由若干个基本运算单元经过相互连接来反映系统变量之间的运算关系。系统框图

除能反映运算变量之间的关系外，还能以图形的方式直观地表示各单元在系统中的地位和作用。

下面介绍几种常用的系统基本运算单元。

设用 · 来代替 t 或 n，则

（1）加法器

$y(\cdot)=f_1(\cdot)+f_2(\cdot)$ 如图 2.9 所示 。

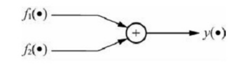


图 2.9　加法器框图

（2）数乘器

$y(\cdot)=af(\cdot)$ 如图 2.10 所示。

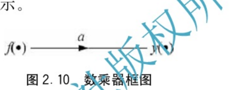


图 2.10　数乘器框图

（3）乘法器

$y(\cdot)=f_1(\cdot)f_2(\cdot)$ 如图 2.11 所示。

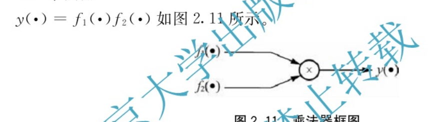


图 2.11　乘法器框图

（4）积分器

$y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 如图 2.12 所示。

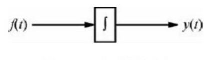


图 2.12　积分器框图

（5）移位器

$y(n)=f(n-1)$ 如图 2.13 所示。

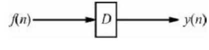


图 2.13　移位器框图

移位器用于离散时间系统，由于离散时间系统的数学模型是差分方程，对一阶差分而言，用图形表示时，相当于位移一个单位。

【知识要点提醒】　画系统框图时，需要注意以下几点。

(1) 系统框图中，加法器的输出是微分方程(或差分方程)的最高阶。

(2) 当微分方程(或差分方程)输入信号的阶数等于(或高于)一阶时，应采用变量代换的方法建立辅助方程。

下面以例题说明系统方程的画法。

【例 2.3】 某一连续时间系统的微分方程为

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=f(t)$$

试画出该系统的系统框图。

【解题思路与技巧】 由于微分方程的最高阶为二阶，以 $y''(t)$ 作为加法器的输出，其后面需要经过两个积分器才能得到 $y'(t)$ 和 $y(t)$，且输入信号为零阶。

解：写出系统框图的微分方程

$$y''(t)=f(t)-a_1y'(t)-a_0y(t)$$

画出的系统框图如图 2.14 所示。

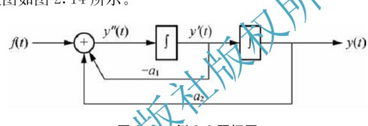


图 2.14 例 2.3 题框图

由此可以看出，当输出信号为二阶时，系统中需要两个积分器来表示。

【例 2.4】 某一连续时间系统的微分方程为

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_1f'(t)+b_0f(t)$$

试画出该系统的系统框图。

【解题思路与技巧】 由于输出函数最高阶为二阶，故需要两个积分器。输入信号的最高阶数为一阶，对这类系统需要引用辅助方程。

解：设最右边积分器的输出为辅助函数 $x(t)$，则两个积分器的输入端分别为 $x'(t)$ 和 $x''(t)$，因此可写出两个辅助方程

$x''(t)=f(t)-a_1x'(t)-a_0x(t)$

$y(t)=b_1x'(t)+b_0x(t)$

根据辅助方程可以画出系统框图，如图 2.15 所示。

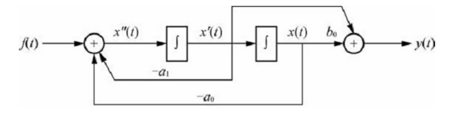


图 2.15 例 2.4 题框图

下面证明该框图表示的系统就是原微分方程所表示的系统。

【证明】 对辅助方程求导数

$$x'''(t)=f'(t)-a_1x''(t)-a_0x'(t)$$
$$y''(t)=b_1x'''(t)+b_0x''(t)$$

代入方程，可得

$$\begin{aligned}y''(t)&=b_1x'''(t)+b_0x''(t)\\&=b_1[f'(t)-a_1x''(t)-a_0x'(t)]+b_0[f(t)-a_1x'(t)-a_0x(t)]\\&=b_1f'(t)+b_0f(t)-a_1[b_1x''(t)+b_0x'(t)]-a_0[b_1x'+b_0x(t)]\\&=b_1f'(t)+b_0f(t)-a_1y'(t)-a_0y(t)\end{aligned}$$

移项整理可得　　$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_1f'(t)+b_0f(t)$

由此证得，框图所代表的系统显然与原微分方程相同。

【知识要点提醒】 将系统框图与微分方程进行比较，不难发现，微分方程中输出函数 $y(t)$ 及各阶导数的系数对应系统框图中的反馈支路，系数加一个负号。微分方程中输入函数 $f(t)$ 及各阶导数的系数对应系统框图中的正向支路，系数符号不变。

将上述结论可以推广到 n 阶连续时间系统。

设 n 阶连续时间系统的输入、输出方程为

$$\begin{aligned}&y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)\\&=b_mf^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1f'(t)+b_0f(t)\end{aligned}$$

式中：$m<n$。

相应的系统框图如图 2.16 所示。

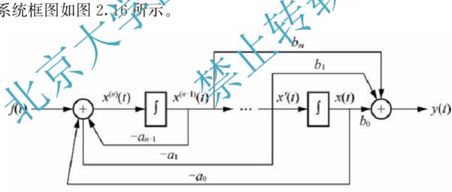


图 2.16　n 阶系统框图

【例 2.5】 某离散系统的输入输出差分方程为

$$y(n)+a_1y(n-1)+a_0y(n-2)=f(n-2)$$

画出该系统的框图。

【解题思路与技巧】 由于输入信号的最高阶为零阶，故不需要列辅助方程，与【例 2.3】类似，加法器的输出为差分方程的最高阶。

解： 方程经变换可得

$$y(n+2)+a_1y(n+1)+a_0y(n)=f(n)$$
$$y(n+2)=f(n)-a_1y(n+1)-a_0y(n)$$

系统框图如图 2.17 所示。

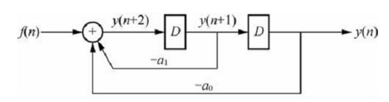


图 2.17　例 2.5 题框图

【例 2.6】 某离散系统框图如图 2.18 所示，试写出描述该系统输入输出关系的差分方程。

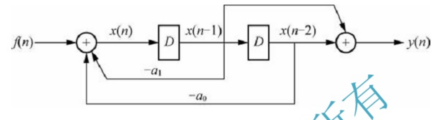


图 2.18　例 2.6 题框图

【解题思路与技巧】 根据移位器的输入输出关系，分别写出输入端和输出端的方程表达式。然后解联立方程，消去 $x(n)$ 即可得出差分方程。

解： 系统框图中有两个移位器，故系统为二阶系统。设辅助函数 $x(n)$ 作为加法器的输出，则

$$x(n)=f(n)-a_1x(n-1)-a_0x(n-2)$$

即

$$x(n)+a_1x(n-1)+a_0x(n-2)=f(n)$$

系统输出

$$y(n)=b_1x(n-1)+b_0x(n-2)$$

为了消除辅助函数项，将前式进行差分，代入整理可得

$$\begin{aligned}y(n)&=b_1f(n-1)-b_1[a_1x(n-2)-a_0x(n-3)]\\&\quad+b_0f(n-2)-b_0[a_1x(n-3)+a_0x(n-4)]\\&=b_1f(n-1)+b_0f(n-2)-a_1y(n-1)-a_0y(n-2)\end{aligned}$$

因此，系统的差分方程为

$$y(n)+a_1y(n-1)+a_0y(n-2)=b_1f(n-1)+b_0f(n-2)$$

【小思考】 对输入信号为一阶以上的简单系统框图如何根据框图的特点，不通过建立辅助方程而直接画出系统框图？

2.3　连续时间系统的性质

系统的作用是将输入信号经过一定的系统变换转换成所需要的输出信号。因此，它的特性也是通过输入输出关系反映出来的。

下面主要介绍系统在输入输出描述方式下常用的几个重要性质。



2.3.1 连续时间系统的性质

1. 线性系统

设系统的输入信号为 $f(t)$，在此激励下，系统的响应为 $y(t)$，在一个没有初始储能的系统中，如果满足

1）齐次性

若 $f(t) \xrightarrow{\text{响应}} y(t)$ 且 $af(t) \xrightarrow{\text{响应}} ay(t)$（$a$ 为常数）

或写成

$$T\{af(t)\} \xrightarrow{\text{响应}} ay(t) \tag{2-3}$$

则称系统具有齐次性。

2）叠加性

若 $f_1(t) \xrightarrow{\text{响应}} y_1(t)$，$f_2(t) \xrightarrow{\text{响应}} y_2(t)$

且

$$f_1(t)+f_2(t) \xrightarrow{\text{响应}} y_1(t)+y_2(t)$$

或写成

$$T\{f_1(t)+f_2(t)\} \xrightarrow{\text{响应}} y_1(t)+y_2(t) \tag{2-4}$$

则称系统具有叠加性。

如果同时满足齐次性和叠加性，则系统具有线性性质，该系统称为线性系统。否则，系统为非线性系统。

因此，综合齐次性和叠加性，线性系统也可以用下式来表示，即

$$af_1(t)+bf_2(t) \xrightarrow{\text{响应}} ay_1(t)+by_2(t)$$

或写成

$$T\{af_1(t)+bf_2(t)\} \xrightarrow{\text{响应}} y_3(t)=ay_1(t)+by_2(t) \tag{2-5}$$

通常以线性微分方程作为输入输出描述方程的系统都是线性系统，而以非线性微分方程作为输入输出描述方程的系统都是非线性系统。

2. 增量线性系统

线性系统的信号在数学上的变换关系是线性关系，但这并不意味着所有的输入与输出之间的变换关系就是线性的。例如

$$y(t)=af(t)+b \tag{2-6}$$

表示的系统就不是线性系统，因为该系统的零输入不产生零输出，即当 $f(t)=0$ 时，$y(t)=b$。尽管这种系统不是线性系统，但它们能够线性的响应任何输入信号的改变。换

言之，对于这类系统，任何两个输出响应之差对应两个输入信号之差的线性变换，即满足"差信号"（增量）的线性性质，因此称这类系统为增量线性系统。

对于式(2-6)系统有

$$\Delta y(t)=y_1(t)-y_2(t)=[af_1(t)+b]-[af_2(t)+b]=a[f_1(t)-f_2(t)]=a\Delta f(t)$$

增量线性系统的系统结构图如图 2.19 所示。

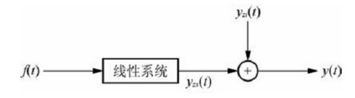


图 2.19　增量线性系统结构图

任何增量线性系统的输出响应等于输入信号加到该系统的响应与一个不受输入信号影响的零输入响应之和。

一般来讲，增量线性系统中不受输入信号影响的部分是由系统的初始储能决定的，因此含初始储能的线性系统为增量线性系统。

增量线性系统的判别方法。

（1）判断零状态响应满足齐次性和叠加性，即线性性质。

（2）判断零输入响应满足齐次性和叠加性，即线性性质。

【小思考】　在你所见到的实际系统中哪些是线性增量系统？

【例 2.8】　判断下列系统是否为线性系统，并区分它们的类别。

(1) $y(t)=tf(t)$　　(2) $y(t)=3x(0_-)+5f(t)$

(3) $y(t)=f^2(t)$

【解题思路与技巧】　验证是否为线性系统，需要通过输入、输出关系来检验是否满足齐次性和叠加性，为了简洁，只要验证是否满足式(2-5)即可。在满足线性关系的同时，再检验初始储能是否满足增量线性系统的定义。

解：(1) $y(t)=tf(t)$

设 $y_1(t)=tf_1(t)$，$y_2(t)=tf_2(t)$，$f_3(t)=af_1(t)+bf_2(t)$，

则 $T[f_3(t)]=t[af_1(t)+bf_2(t)]=taf_1(t)+tbf_2(t)$

$$ay_1(t)+by_2(t)=atf_1(t)+btf_2(t)=T[f_3(t)]$$

该系统为线性系统。

(2) $y(t)=3x(0_-)+5f(t)$

由于 $y(t)$ 与 $f(t)$ 之间满足齐次性和叠加性，因此具有线性性质。同时增量满足零输入响应线性。

该系统为增量线性系统。

(3) $y(t)=f^2(t)$

设 $y_1(t)=f_1^2(t)$，$y_2(t)=f_2^2(t)$，$f_3(t)=af_1(t)+bf_2(t)$，



则 $T[f_3(t)] = [af_1(t)+bf_2(t)]^2 = a^2 f_1^2(t)+b^2 f_2^2(t)+2abf_1(t)f_2(t)$

$$ay_1(t)+by_2(t) = af_1^2(t)+bf_2^2(t) \neq T[f_3(t)]$$

该系统为非线性系统。

3. 时不变特性

时不变系统是指系统参数不随时间变化的系统。对于一个时不变系统而言，由于系统参数不随时间 t 变化，故系统的输入输出关系也不随时间变化。

时不变系统可以理解为：若输入激励信号 $f(t)$ 作用于系统时，其产生的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 在输入激励信号延时 t_d 时间时，也延时相同的时间，且相应的波形形状保持不变。

连续时间时不变系统的示意图如图 2.20 所示。

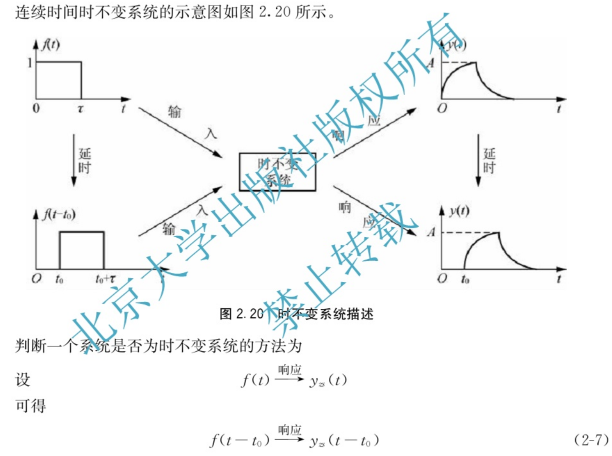


图 2.20　时不变系统描述

判断一个系统是否为时不变系统的方法为

设
$$f(t) \xrightarrow{\text{响应}} y_{zs}(t)$$
可得
$$f(t-t_0) \xrightarrow{\text{响应}} y_{zs}(t-t_0) \tag{2-7}$$
则该系统称为时不变系统。

若一个系统既具有线性系统特性，又具有时不变特性，则称该系统为线性时不变系统(linear time-invariant systems，LTI 系统)，本书主要以线性时不变系统进行分析。

【例 2.8】 判断下列系统是否为时不变系统。

(1) $y_{zs}(t) = 3f^2(t)+5f(t)$　　(2) $y_{zs}(t) = \sin t \cdot f(t)$

(3) $y_{zs}(t) = tf(t)$　　(4) $y_{zs}(t) = 4\cos[f(t)]$

(5) $y_{zs}(t) = 5f(2t)$

【解题思路与技巧】 判断系统的时不变性，首先假设输入信号 $f(t)$ 中的整个自变量时移 t_0 个单位，然后再将输出信号的自变量 t 时移 t_0 个单位(即 $t \to t \pm t_0$)，检验两者时移

后是否相等。

解：(1) $y_{zs}(t)=3f^2(t)+5f(t)$

设 $$f_1(t)=f(t-t_0)$$

$$y_{zs1}(t)=3f_1^2(t)+5f_1(t)=3f^2(t-t_0)+5f(t-t_0)$$

$$y_{zs}(t-t_0)=3f^2(t-t_0)+5f(t-t_0)$$

$$y_{zs1}(t)=y_{zs}(t-t_0)$$

该系统为时不变系统。

(2) $y_{zs}(t)=\sin t\cdot f(t)$

设 $$f_1(t)=f(t-t_0)$$

$$y_{zs1}(t)=\sin t\cdot f_1(t)=\sin t\cdot f(t-t_0)$$

$$y_{zs}(t-t_0)=\sin(t-t_0)\cdot f(t-t_0)$$

$$y_{zs1}(t)\neq y_{zs}(t-t_0)$$

该系统为时变系统。

(3) $y_{zs}(t)=tf(t)$

设 $$f_1(t)=f(t-t_0)$$

$$y_{zs1}(t)=tf_1(t)=tf(t-t_0)$$

$$y_{zs}(t-t_0)=2(t-t_0)f(t-t_0)$$

$$y_{zs1}(t)\neq y_{zs}(t-t_0)$$

该系统为时变系统。

(4) $y_{zs}(t)=4\cos[f(t)]$

设 $$f_1(t)=f(t-t_0)$$

$$y_{zs1}(t)=4\cos[f_1(t)]=4\cos[f(t-t_0)]$$

$$y_{zs}(t-t_0)=4\cos[f(t-t_0)]$$

$$y_{zs1}(t)=y_{zs}(t-t_0)$$

该系统为时不变系统。

(5) $y_{zs}(t)=5f(2t)$

设 $$f_1(t)=f(t-t_0)$$

$$y_{zs1}(t)=5f_1(2t)=5f(2t-t_0)$$

$$y_{zs}(t-t_d)=5f[2(t-t_0)]=5f(2t-2t_0)$$

$$y_{zs1}(t)\neq y_{zs}(t-t_0)$$

该系统为时变系统。

4. 因果系统

若系统的输入与系统的输出之间是一种因果关系，即输入是产生输出的原因，输出是输入引起的结果，则称该系统是因果系统。否则为非因果系统。

判断一个系统是否为因果系统，还可以从以下两个方面考察。



(1) 如果在一个系统中，其输入在 $t < t_0$ 时为零，其零状态输出在 $t < t_0$ 时也为零，则该系统为因果系统。

(2) 在因果系统中，原因决定结果，结果不会出现在原因之前。因此，如果一个系统在任意时刻的输出响应只取决于过去的输入和当前的输入，而与将来的输入无关，则该系统为因果系统。

由于因果系统与将来的输入无关，没有预测未来输入的能力，因此也称为不可预测系统。

【例 2.9】 判断下列系统是否为因果系统。

(1) $y(t) = f(t) + 5$　　(2) $y(t) = 2f(t) + 7f(t-1)$

(3) $y(t) = f(t-1) + 3f(t) - 7f(t+1)$　　(4) $y(t) = \sum_{i=-\infty}^{t} f(i)$

(5) $y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)$

【解题思路与技巧】 判断系统是否为因果系统，主要取决于输入输出之间的时间关系，若系统的输出仅取决于当前的输入和之前的输入，系统为因果系统，若还取决于系统未来的输入，则为非因果系统。

解： (1) $y(t) = f(t) + 5$，其输出响应只与当前的输入有关，故该系统是因果系统。

(2) $y(t) = 2f(t) + 7f(t-1)$，其输出响应只与当前的输入和过去的输入有关，故该系统是因果系统。

(3) $y(t) = f(t-1) + 3f(t) - 7f(t+1)$，其输出响应不仅与当前的输入和过去的输入有关，而且与将来的输入有关，故该系统是非因果系统。

(4) $y(t) = \sum_{i=-\infty}^{t} f(i)$，其输出响应只与当前的输入和过去的输入有关，故该系统是因果系统。

(5) $y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)$，其输出响应不仅与当前的输入和过去的输入有关，而且与将来的输入有关，故该系统是非因果系统。

5. 稳定系统

对于一个系统，如果它对任何有界输入 $f(t)$ 所产生的零状态响应 $y(t)$ 也是有界的，则该系统称为有界输入/有界输出(Bound-input/Bound-output)系统，简记为 BIBO 系统。

即

$$|f(t)| < \infty, t \to \infty, \quad 则 \quad |y(t)| < \infty \quad t \to \infty \tag{2-8}$$

有界输入/有界输出系统是稳定系统。

若系统输入有界而输出无界，则系统为不稳定系统。

【小思考】 在你所见到的实际系统中碰到过哪些不稳定现象?

【例 2.10】 判断下列系统是否为稳定系统。

(1) $y(t)=\mathrm{e}^{f(t)}$ (2) $y(t)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$

(3) $y(t)=2[\cos(4t)]f(t)$

【解题思路与技巧】 判断系统是否为稳定系统，首先假设 $f(t)=M<\infty$，然后将 $f(t)$ 代入系统，检验输出是否满足 $y(t)=N<\infty$，若满足，则系统为稳定系统，否则为非稳定系统。

解：(1) $y(t)=\mathrm{e}^{f(t)}$

由定义当 $t\to\infty$，$|f(t)|\leqslant M<\infty$ 时，$t\to\infty$ $|y(t)|=|\mathrm{e}^{f(t)}|\leqslant \mathrm{e}^{|f(t)|}\leqslant \mathrm{e}^{M}<\infty$，故系统是稳定的。

(2) $y(t)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$

由题可以看出，当输入信号 $f(t)=u(t)$ 时，输出信号 $y(t)=2\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$ 是无穷的，故该系统是不稳定的。

(3) $y(t)=2[\cos(4t)]f(t)$

由于 $-1\leqslant\cos(4t)\leqslant 1$ 且 $t\to\infty$，$f(t)\leqslant M<\infty$，

故 $t\to\infty$，$y(t)=2[\cos(4t)]f(t)\leqslant M<\infty$

系统是稳定的。

【例 2.11】 设系统的输入信号 $f(t)$，系统响应 $y(t)$，判断下列系统的性质(线性/非线性，时变/时不变，因果/非因果，稳定/不稳定)。

(1) $y(t)=f(t-2)+f(2-t)$ (2) $y(t)=\sin[f(t)]+f(t-4)$

【解题思路与技巧】 分别用线性系统、时不变系统、因果系统和稳定系统的判别方法逐一判别。

解：(1) ① 因为系统满足齐次性和叠加性，故为线性系统。

② $y(t)=f(t-2)+f(2-t)=y_1(t)+y_2(t)$

$y_1(t)=f(t-2)$ 是时不变的，$y_2(t)=f(2-t)$ 是时变的，故该系统是时变系统。

③ $y_2(t)=f(2-t)$，该系统是非因果系统。

④ 若 $t\to\infty$，$|f(t)|<\infty$，则 $t\to\infty$，$|f(t-2)|<\infty$，$|f(2-t)|<\infty$ 稳定，

故该系统为线性时变非因果稳定系统。

(2) ① $\sin[f(t)]$ 不满足线性特性。

② 满足时不变性。

③ 输出仅与当前和过去的输入有关，满足因果性。

④ 若 $t\to\infty$，$|f(t)|<\infty$，则 $t\to\infty$，$|y(t)|<\infty$ 稳定，

故该系统为非线性时不变因果稳定系统。



6. 记忆系统和非记忆系统

对于任意输入信号 $f(t)$，系统的输出信号 $y(t)$ 仅取决于在同一时刻(t 时刻)的输入信号，则该系统为非记忆系统。否则，系统为记忆系统。非记忆系统也称为即时系统，记忆系统也称为动态系统。

由非记忆系统的定义可以看出：非记忆系统都是因果系统。

记忆系统和非记忆系统显然是与系统中能否储能密切相关的。由纯电阻网络组成的系统是非记忆系统，而由电容和电感元件组成的系统则是记忆系统。

例如，由下列关系式表达的系统

$$y(t)=f(t)+f^2(t)$$

就是一个非记忆系统。而由电容的输入输出关系式表达的系统

$$y(t)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

则是一个记忆系统。

【例 2.12】 判断下列系统是否为记忆系统。

(1) $y(t)=\begin{cases}f(t) & |f(t)\leqslant 10|\\ 10 & |f(t)>10|\end{cases}$　(2) $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=3y(t)+2f(t)$

【解题思路与技巧】 非记忆系统利用“当前的输出只与当前的输入有关”来判断。

解：(1) 由于当前的输出只与当前的输入有关，故该系统为非记忆系统。

(2) 用一阶微分方程描述的系统中含有一个独立储能元件，故该系统为记忆系统。

7. 可逆系统和非可逆系统

如果一个系统对每一个输入信号 $f(t)$ 都产生不同的输出信号 $y(t)$，或者说，根据系统的输出信号 $y(t)$ 可以唯一的确定它的输入信号 $f(t)$，则称该系统为可逆系统。

对任意两个不同的输入信号系统产生相同的输出信号，系统是不可逆的。显然，对任何输入信号都输出零的系统是不可逆系统。

从数学的角度上讲，若系统的变换关系 $y(t)=T\{f(t)\}$ 是一一对应的，那么它是可逆系统。可逆系统的变换是一个可逆函数关系。

判断系统是否为可逆系统的必要条件是：对任何可逆系统，必定存在另一个系统，满足变换关系 $T^{-1}\{*\}$，将它与原系统级联后，其输出仍然为原函数。

可逆系统的示意图如图 2.21 所示。



图 2.21　可逆系统和逆系统示意图

通常把系统 $T^{-1}\{*\}$ 称为逆系统。

对于一个连续时间系统，如 $y(t)=kf(t), k\neq 0$，是一个可逆系统，其逆系统可以表示为 $f(t)=\frac{1}{k}y(t), k\neq 0$。显然，积分器的逆系统就是微分器。

可逆性的概念在很多领域都是一个很重要的概念，如在通信领域中，利用可逆性概念实现信号的调制、发射与恢复。例如，在信号通信中，发射设备中信号幅度压扩器、编码器、调制器等是可逆系统，信号发射完成后，接收设备中用逆系统如幅度反扩压器、解码器、解调器等设备来恢复发送端的原始信号。

【例 2.13】 判断下列系统是否为可逆系统，若可逆，求出他们的逆系统。若不可逆，指出使该系统产生相同输出的两个输入信号。

(1) $y(t)=f(t-3)$　　(2) $y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$　　(3) $y(t)=\cos[f(t)]$

【解题思路与技巧】 非可逆系统利用"对任何两个不同的输入信号，系统产生相同的输出信号"来判断。

解：(1) 该系统为可逆系统。逆系统为 $y(t)=f(t+3)$。

(2) 若取 $f_1(t)=C_1$，$f_2(t)=C_2$，则

$$y_1(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_1=0\qquad y_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_2=0$$

故为不可逆系统。

(3) 若取 $f_1(t)=f(t)+2k\pi$ 时，系统输出

$$y_1(t)=\cos[f_1(t)]=\cos[f(t)+2k\pi]=\cos[f(t)]=y(t)$$

表明该系统的输入与输出不是单值一一对应的，故系统为不可逆系统。

2.3.2 离散时间系统特性

1. 线性系统

线性系统包含两个性质。

1) 可加性

设
$$f_1(n)\xrightarrow{\text{响应}}y_1(n)\qquad f_2(n)\xrightarrow{\text{响应}}y_2(n)$$
则
$$f_1(n)+f_2(n)\xrightarrow{\text{响应}}y_1(n)+y_2(n)\tag{2-9}$$

2) 齐次性

若
$$f(n)\xrightarrow{\text{响应}}y(n)$$
则
$$af(n)\xrightarrow{\text{响应}}ay(n)\tag{2-10}$$

综合上两特性，可写为



$$af_1(n)+bf_2(n)\xrightarrow{\text{响应}}ay_1(n)+by_2(n) \tag{2-11}$$

满足叠加原理的系统称为线性系统。

2. 移不变系统

如果系统的输出响应与加入到该系统的输入激励的时刻无关，则该系统称为移不变系统(或时不变系统)。也就是说，当系统的激励为 $f(n)$ 时，系统的响应为 $y(n)$，若系统的激励移位到 $f(n-m)$ 时，则系统的输出也作相同的位移 $y(n-m)$。

即
$$f(n)\xrightarrow{\text{响应}}y(n)$$
则
$$f(n-m)\xrightarrow{\text{响应}}y(n-m) \tag{2-12}$$

【例 2.14】 判断下列系统是否为移不变系统。

(1) $y(n)=f(n)+5$　　(2) $y(n)=nf(n)$

(3) $y(n)=f(n)\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{1}{6}\pi\right)$

【解题思路与技巧】 利用移不变系统的特性，首先将 $f(n)$ 中的 n 做一个时移，变成 $f(n-n_0)$，以产生 $y_1(n)=T\{f(n-n_0)\}$，然后将 $y(n)$ 做时移得到 $y(n-n_0)$，比较 $y_1(n)$ 是否与 $y(n-n_0)$ 相等，若相等，则系统是移不变的，若不相等，则是移变系统。

解：(1) 设 $f_1(n)=f(n-m)$　　$y_1(n)=f_1(n)+5=f(n-m)+5$

$$y(n-m)=f(n-m)+5=y_1(n)$$

故该系统是移不变系统。

(2) 设 $f_1(n)=f(n-m)$　　$y_1(n)=nf_1(n)=nf(n-m)$

$$y(n-m)=(n-m)f(n-m)\neq y_1(n)$$

故该系统是移变系统。

(3) 设 $f_1(n)=f(n-m)$

$$y_1(n)=f_1(n)\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{1}{6}\pi\right)=f(n-m)\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{1}{6}\pi\right)$$

$$y(n-m)=f(n-m)\sin\left[\frac{\pi}{3}(n-m)+\frac{1}{6}\pi\right]\neq y_1(n)$$

故该系统是移变系统。

3. 因果系统

如果一个系统在某时刻的输出只取决于该时刻以及该时刻以前的输入，与该时刻之后的输入无关，则该系统为因果系统。

【例 2.15】 检验下列系统是否为因果系统。

(1) $y(n)=5f(n)+nf(n-1)$　　(2) $y(n)=nf(n+1)+f(n-1)$

(3) $y(n)=f(n^2)$　　(4) $y(n)=3f(-n)$

【解题思路与技巧】 利用因果系统的特性，检验 n 时刻的输出，若 n 时刻的输出取决 n 时刻的输入和 n 时刻之前的输入，则系统是因果系统，若取决于 n 时刻以后的输入，则系统是非因果的。

解：(1) 输出响应 $y(n)$ 只与 n 和 $n-1$ 时刻的输入有关，故是因果系统。

(2) 输出响应 $y(n)$ 不仅与 n 和 $n-1$ 时刻的输入有关，而且与 $n+1$ 时刻的输入有关，故是非因果系统。

(3)、(4) 当取 $n=-1$ 时，输出先于输入，故系统为非因果系统。

4. 稳定系统

稳定系统是指有界输入产生的有界输出(BIBO)系统。

若 $$|f(n)|<\infty \quad n\to\infty$$

则 $$|y(n)|<\infty \quad n\to\infty \tag{2-13}$$

【例 2.16】 检验下列系统是否为稳定系统。

(1) $y(n)=f(n^2-7)$ (2) $y(n)=(n-20)f(n+1)$

【解题思路与技巧】 利用稳定系统的特性，先假设当 $n\to\infty$ 时，$|f(n)|=M<\infty$，然后检验当 $n\to\infty$ 时，$|y(n)|$ 是否小于无穷，若满足条件，则系统为稳定系统，否则为不稳定系统。

解：(1) $y(n)=f(n^2-7)$

设 $$n\to\infty \quad |f(n)|=M<\infty$$

则 $$n\to\infty \quad |y(n)|=|f(n^2-7)|$$

由于 $|f(n^2-7)|$ 为有界函数，故

$$n\to\infty \quad |y(n)|=|f(n^2-7)|=N<\infty$$

因此，该系统为稳定系统。

(2) $y(n)=(n-20)f(n+1)$

设 $$n\to\infty \quad |f(n)|<\infty$$

则 $$n\to\infty \quad |y(n)|=|(n-20)f(n+1)|$$

由于 $|f(n+1)|$ 为有界函数，而 $|(n-20)\to\infty|$，故

$$n\to\infty \quad |y(n)|=|(n-20)f(n+1)|\text{ 不一定小于无穷。}$$

因此，该系统为不稳定系统

5. 记忆系统

对于任意一个输入信号 $f(n)$，系统的输出信号 $y(n)$ 仅取决于在同一时刻(n 时刻)的输入信号，则该系统为无记忆系统。否则，系统称为记忆系统。

【例 2.17】 检验下列系统是否为记忆系统。

(1) $y(n)=[f(n)+f_2(n)]^2$ (2) $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}f(k)$



(3) $y(n) = f(n-1)$

【解题思路与技巧】 根据非记忆系统的定义，检验输出信号 $y(n)$ 仅与输入信号 $f(n)$ 的 n 时刻有关，该系统就是非记忆系统，如果与 n 时刻以前的输入 $f(n-k)$ 有关，该系统为记忆系统。

解：(1) $y(n) = [x(n) + x^2(n)]^2$ 仅与 n 时刻有关，该系统为非记忆系统。

(2) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} f(k)$，由于该系统为一个累加器，系统的输出 $y(n)$ 不仅与输入 $f(n)$ 的 n 时刻有关，而且还取决于 $n-1 \sim -\infty$ 时刻，因此该系统为一个记忆系统。

(3) $y(n) = f(n-1)$，该系统为一个延时器，系统的输出 $y(n)$ 仅与输入 $f(n)$ 的 $n-1$ 时刻有关，故也是一个记忆系统。

6. 可逆系统

如果一个系统对每一个输入信号 $f(n)$ 都产生不同的输出信号 $y(n)$。或者说，根据系统的输出信号 $y(n)$ 可以唯一的确定它的输入信号 $f(n)$，称该系统为可逆系统。

对任何两个不同的输入信号，系统产生相同的输出信号，系统是不可逆的。显然，对任何输入信号都输出零的系统是不可逆系统。

【例 2.18】 检验下列系统是否为可逆系统。

(1) $y(n) = f^2(n)$ (2) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} f(k)$

(3) $y(n) = \begin{cases} f(n-1) & n \geqslant 1 \\ 0 & n = 0 \\ f(n) & n \leqslant -1 \end{cases}$

【解题思路与技巧】 根据可逆系统的定义，首先看能否找到两个不同的输入信号 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$，将他们输入到系统中所产生相同的输出，如果存在，则是不可逆系统，否则，系统为可逆系统。

解：(1) $y(n) = f_2(n)$

由于可以选取 $f_1(n) = f(n)$，$f_2(n) = -f(n)$，而它们具有相同的输出 $y(n) = f_2(n)$，故该系统为不可逆系统。

(2) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} f(k)$

由于系统中输入信号 $f(n)$ 与输出信号 $y(n)$ 之间是一一对应的，故该系统为可逆系统。其逆系统为

$$T^{-1}\{f(n)\} = y(n) - y(n-1)$$

(3) $y(n) = \begin{cases} f(n-1) & n \geqslant 1 \\ 0 & n = 0 \\ f(n) & n \leqslant -1 \end{cases}$

系统为可逆系统。其逆系统为



$$T^{-1}\{f(n)\}=\begin{cases}f(n+1) & n\geqslant 1\\ 0 & n=0\\ f(n) & n\leqslant -1\end{cases}$$

本章知识要点

1. 系统的基本概念

1）系统的分类和系统方程的建立。

2）系统框图的画法，尤其是高阶(包括输入信号 $f(t)$ 的导数在一阶以上)系统框图的画法。

2. 连续时间系统的性质

1）线性系统

满足齐次性和叠加性，即

连续时间系统　$T\{af_1(t)+bf_2(t)\}\xrightarrow{\text{响应}}ay_1(t)+by_2(t)$

离散时间系统　$af_1(n)+bf_2(n)\xrightarrow{\text{响应}}ay_1(n)+by_2(n)$

2）增量线性系统

任何增量线性系统的输出响应等于输入信号加到该系统的响应与一个不受输入信号影响的零输入响应之和。

3）时不变特性

时不变系统是指系统参数不随时间变化的系统，即

连续时间系统　$f(t-t_0)\xrightarrow{\text{响应}}y_{zs}(t-t_0)$

离散时间系统　$f(n-m)\xrightarrow{\text{响应}}y(n-m)$

4）因果系统

如果一个系统在任意时刻的输出响应只取决于过去的输入和当前的输入，而与将来的输入无关，则该系统为因果系统。

5）稳定系统

有界输入/有界输出系统是稳定系统。

即　$t\to\infty\,|f(t)|<\infty$，　则　$t\to\infty\,|y(t)|<\infty$

或　$n\to\infty\,|f(n)|<\infty$，　则　$n\to\infty\,|y(n)|<\infty$

6）非记忆系统

任意输入信号 $f(t)$，系统的输出信号 $y(t)$ 仅取决于在同一时刻(t 时刻)的输入信号，则该系统为非记忆系统。非记忆系统都是因果系统。

7）可逆系统

根据系统的输出信号 $y(t)$ 可以唯一地确定它的输入信号 $f(t)$，该系统称为可逆系统。

习题 2

2.1　电路如图 2.22 所示，输入信号为 $i_s(t)$，写出以 $i(t)$ 为输出时电路的输入输出方程。

2.2　电路如图 2.23 所示，电路元件参数 $R_1 = R_2 = 2\Omega$，$L = 1\text{H}$，$C = \frac{1}{2}\text{F}$。求电压 $u_o(t)$ 的微分方程。

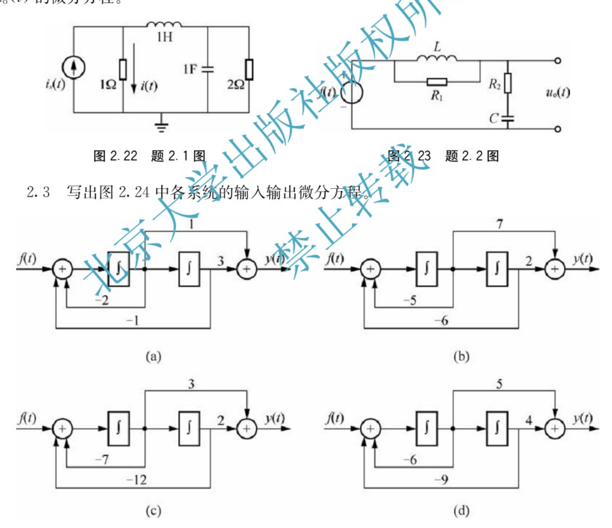


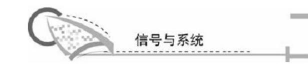
图 2.22　题 2.1 图　　　图 2.23　题 2.2 图

2.3　写出图 2.24 中各系统的输入输出微分方程。

图 2.24　题 2.3 图

2.4　写出图 2.25 中系统的输入输出微分方程。

2.5　已知连续时间系统的微分方程，试画出其系统框图。



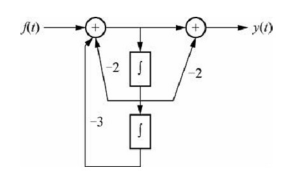


图 2.25　题 2.4 图

(1) $y''(t)+2y'(t)+3y(t)=3f(t)$

(2) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3f''(t)+7f'(t)+2f(t)$

(3) $y''(t)+12y'(t)+4y(t)=3f'(t)+2f(t)$

(4) $2y''(t)+6y'(t)+8y(t)=7f'(t)+4f(t)$

2.6　图 2.26 所示为离散时间系统框图，写出各系统的差分方程。

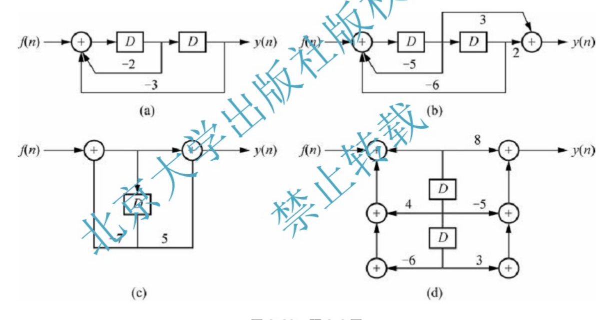


图 2.26　题 2.6 图

2.7　已知离散时间系统的差分方程如下，画出其系统框图。

(1) $y(n)+4y(n-1)+5y(n-2)=f(n)$

(2) $y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=f(n+2)$

(3) $y(n)+7y(n-1)+8y(n-2)=2f(n)+5f(n-1)$

(4) $y(n+2)+8y(n+1)+3y(n)=2f(n+2)+5f(n+1)$

2.8　判断下列系统的性质(线性系统、增量线性系统、非线性系统)，式中 $x(0)$ 为系统的初始条件。

(1) $y(t)=2x(0)+3\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$　　(2) $y(t)=3x(0)+2f_2(t)$

(3) $y(t)=5x^2(0)+4f(t)$　　(4) $y(t)=3x^2(0)+2f(t^2)$



(5) $y(t)=x(0)+4f(\sin t)$　　(6) $y(t)=6f(t)-2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$

2.9　判断下列系统是否为时不变系统。

(1) $y(t)=tf(t)$　　(2) $y(t)=f(-t)$

(3) $y(t)=3f(t)+2\sin[f(t)]$　　(4) $y(t)=3f_2(t)+4f(2t)$

2.10　判断下列离散时间系统的性质(线性系统、增量线性系统、非线性系统)。

(1) $y(n)=2nf(n)$　　(2) $y(n)=f(n^2)$

(3) $y(n)=2f(n)+7$　　(4) $y(n)=\mathrm{e}^{f(n)}$

(5) $y(n)=3f(n-1)+f(n)$　　(6) $y(n)=5f(n)+4x(0_-)$

2.11　判断下列系统是否为时不变系统。

(1) $y(n)=f(n-1)+2f(n)$　　(2) $y(n)=f(n)\cos(\omega_0 n)$

(3) $y(n)=f(n-n_0)f(n)$　　(4) $y(n)=\begin{cases} f(n) & n\geqslant 1 \\ 0 & n=0 \\ f(n-1) & n\leqslant -1 \end{cases}$

2.12　系统框图如图2.27(a)和输入信号2.27(b)所示，若开平方运算产生的是正的平方根。

(1) 计算输出信号为 $y(t)$ 与输入信号 $f(t)$ 之间的函数关系式。

(2) 判断该系统的线性性和时不变性。

(3) 若输入信号 $f(t)$ 如图2.27(b)所示，画出 $y(t)$ 的波形。

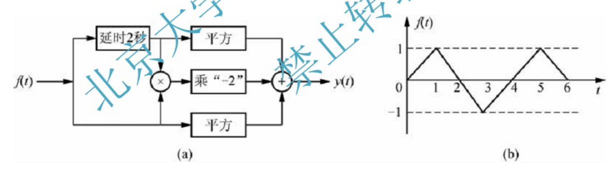


图2.27　系统框图及输入信号

2.13　判断下列系统是否为因果稳定系统。

(1) $y(n)=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f(n-k)$　　(2) $y(n)=f(n+2)+2f(n)$

(3) $y(n)=\dfrac{1}{N}\sum_{k=N-n}^{N+n}f(k)$　　(4) $y(n)=f(n-n_0)$

(5) $y(n)=\mathrm{e}^{f(n)}$

2.14　判断下列信号所代表系统的性质(线性、时不变和因果性)。

$$y(t)=|f(t)-f(t-1)|$$

2.15　判断下列系统的性质(线性、时不变、因果、稳定和记忆性)。

(1) $y(t)=f(t)+1$　　(2) $y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$

(3) $y(t)=\sin f(t)$　　(4) $y(t)=\mathrm{e}^{-t}f(t)$

(5) $y(t)=f(t-2)$

2.16　判断下列系统是否为可逆系统，若可逆，求出它们的逆系统，若不可逆，指出使该系统产生相同输出的两个输入信号。

(1) $y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$　　(2) $y(t)=f(2t)$

(3) $y(t)=3f(t)$　　(4) $y(t)=f_2(t)$

(5) $y(t)=\cos t$

2.17　某一离散时间系统的输入输出关系为 $y(n)=f(n)f(n-3)$。

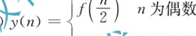
(1) 该系统是无记忆系统吗?(2) 该系统是可逆系统吗?

2.18　某一离散时间系统的输入输出关系为

(1) $y(n)=nf(n)$　　(2) $y(n)=f(1-n)$

(3) $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}f(k)$　　(4) $y(n)=\begin{cases}f(n+1) & n\geqslant 0\\ f(n) & n\leqslant -1\end{cases}$

(5) $y(n)=f(2n)$　　(6) $y(n)=\begin{cases}f\left(\frac{n}{2}\right) & n\text{ 为偶数}\\ 0 & n\text{ 为奇数}\end{cases}$





试判断其系统的特性。



第3章

连续时间系统的时域分析



内容摘要

信号与系统的分析是本课程的一个重要内容，对连续时间系统的分析方法有时域分析法，频域分析法和复频域分析法。本章主要介绍连续时间信号卷积积分，连续时间系统的零输入响应、零状态响应和连续时间系统的全响应。

教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识	工程应用方向
卷积积分	熟悉定义 掌握计算方法	积分与卷积积分	零状态响应分析
系统的零输入响应	掌握分析方法	系统方程求解	系统分析
系统的零状态响应	掌握分析方法	系统方程求解	系统分析



教学目标与要求

了解信号卷积的概念。

掌握卷积积分的计算方法。

掌握系统的零输入响应。

掌握系统的零状态响应。

掌握系统的全响应。

连续时间系统的时域分析是指信号为连续时间信号，系统也是连续时间系统，因此在整个分析过程均在连续时间域内进行，即分析过程中所涉及函数的自变量均为连续时间 t。它是各种变换分析方法的基础。

连续时间系统的时域分析法包含两方面的内容，一是对系统建立微分方程，二是求解系统的零输入响应、单位冲激响应、零状态响应和全响应。本章时域分析方法重点介绍系统微分方程的求解。由于在求解系统零状态响应时要利用卷积积分来计算，本章首先介绍卷积积分的概念。

3.1 卷积积分

3.1.1 卷积的定义

对于任意两个信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，将积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

定义为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积，简记为 $f_1(t)*f_2(t)$，即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3-1}$$

式中，τ 为虚设积分变量，积分的结果为另一个新的时间信号。

卷积积分的定义表明：任意信号的输出等于输入信号的加权积分。任意时刻 t 的卷积积分等于 $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$ 所包含的面积。

3.1.2 卷积积分的计算方法

1. 卷积积分的解析法

若待卷积的两个信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 都能用解析函数式表达，则可以采用解析法，即直接按照卷积积分的表达式进行计算。下面举例说明。

【例 3.1】 如果一个系统的输入信号为 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$，其冲激响应为 $h(t)=u(t)$，则计算其零状态响应 $y(t)=f(t)*h(t)$。

【解题思路与技巧】 系统零状态响应等于输入信号 $f(t)$ 与冲激响应 $h(t)$ 的卷积，卷积的计算可以采用卷积的定义来计算。

解：根据定义，有

$$y(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}u(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

由于

$$u(\tau)=\begin{cases}1 & \tau>0\\0 & \tau<0\end{cases} \quad 和 \quad u(t-\tau)=\begin{cases}1 & \tau<t\\0 & \tau>t\end{cases}$$

因此，当 $t<0$ 时，有

$$u(\tau)u(t-\tau)=0$$

当 $t>0$ 时，有

$$u(\tau)u(t-\tau)=\begin{cases}1 & 0<\tau<t\\0 & \tau<0,\tau>t\end{cases}$$

基于上述规律，$y(t)$ 中的 $u(\tau)$ 和 $u(t-\tau)$ 在积分中确定积分区间

$$y(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}u(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})u(t)$$

3.1.3　常用信号的卷积公式

表 3-1 中列出了常用信号的卷积公式。

表 3-1　常用信号的卷积公式

序号	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t)*f_2(t)$
1	K（常数）	$f(t)$	$K\cdot[f(t)$ 波形的净面积$]$
2	$f(t)$	$\delta(t)$	$f(t)$
3	$f(t)$	$\delta'(t)$	$f'(t)$
4	$f(t)$	$u(t)$	$f^{-1}(t)$
5	$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
6	$u(t)$	$tu(t)$	$\frac{1}{2}t^2u(t)$
7	$u(t)$	$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})u(t)$
8	$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$t\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$
9	$\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}u(t)$	$\mathrm{e}^{-\alpha_2 t}u(t)$	$\frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)}\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}-\mathrm{e}^{-\alpha_2 t}u(t) \quad \alpha_1\neq\alpha_2$
10	$f(t)$	$\delta_T(t)$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(t-mT)$

3.1.4　卷积积分的性质

卷积积分除了用定义运算外，还经常用卷积积分的性质来计算，下面介绍几个常用的性质，利用这些性质可以简化卷积计算。

性质 1　卷积代数

1）交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \tag{3-2}$$

2）分配律

$$[f_1(t) + f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * f_3(t) + f_2(t) * f_3(t) \tag{3-3}$$

3）结合律

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \tag{3-4}$$

上述三式的证明可根据卷积的定义得到，证明略。

性质 2　$f(t)$ 与 $\delta(t)$、$u(t)$ 的卷积

1）
$$f(t) * \delta(t) = f(t) \tag{3-5}$$

证明：利用卷积的定义及冲激函数的筛选性质可得

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f(t)$$

该性质表明，任意函数与单位冲激函数的卷积就是它本身，$\delta(t)$ 是卷积的单位元。

2）
$$f(t) * \delta'(t) = f'(t) \tag{3-6}$$

3）
$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3-7}$$

该性质表明：任意函数与 $u(t)$ 的卷积，相当于通过一个积分器。

性质 3　卷积时移

若

$$f_1(t) * f_2(t) = y(t)$$

则

$$f_1(t-t_0) * f_2(t) = f_1(t) * f_2(t-t_0) = y(t-t_0) \tag{3-8}$$

由式(3-8)还可以进一步得到如下结论：

若

$$f_1(t) * f_2(t) = y(t)$$

则

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = y(t-t_1-t_2) \tag{3-9}$$

【例 3.2】　已知 $f_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$，$f_2(t) = \delta(t+4) + \delta(t-4)$，画出 $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$。

【解题思路与技巧】　该题利用 $f(t) * \delta(t) = f(t)$ 和 $f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = y(t-t_1-t_2)$ 两性质代入即可求得。

解：利用性质可得

$$\begin{aligned} y(t) &= f_1(t) * f_2(t) = [u(t+1) - u(t-1)] * [\delta(t+4) + \delta(t-4)] \\ &= u(t+5) + u(t-3) - u(t+3) - u(t-5) \end{aligned}$$



波形如图 3.1 所示。

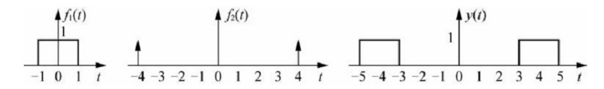


图 3.1　例 3.2 题的信号波形

可见，卷积结果所占的时宽等于两个函数各自时宽的总和。

性质 4　信号 $f(t)$ 与常数 K 的卷积

$$K * f(t) = f(t) * K = K \cdot [f(t)\text{ 波形包含的净面积}] \tag{3-10}$$

该性质表明：常数 K 与任意信号的卷积值等于该信号波形所包含的净面积值的 K 倍。

性质 5　卷积的微分性质

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t} * f_2(t) \tag{3-11}$$

证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\frac{\mathrm{d}f_2(t-\tau)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau = f_1(t) * \frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}$$

同理可以证得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_2(t) * f_1(t)] = \frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t} * f_2(t)$$

显然，$f_2(t) * f_1(t) = f_1(t) * f_2(t)$，故式(3-11)成立。

该性质表明：对两个函数的卷积函数求导，等于其中一个函数的导数与另一个函数的卷积。

性质 6　卷积的积分性质

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda) * f_2(\lambda)]\mathrm{d}\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda = f_2(t) * \int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{3-12}$$

该性质表明：对两个函数的卷积函数求积分，等于其中一个函数的积分与另一个函数的卷积。

性质 7　卷积的微、积分性质

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t} * \int_{-\infty}^{t} f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda * \frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3-13}$$

证明：由积分性质

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda) * f_2(\lambda)]\mathrm{d}\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

上式两边求导可得

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right] \underline{\text{由微分性质}} \frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t} * \int_{-\infty}^{t} f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

由于卷积满足交换律，显然式(3-13)成立。

性质 8 冲激序列与任意信号 $f(t)$ 的卷积

$$y(t)=f(t)*\delta_T(t)=f(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t)*\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT) \tag{3-14}$$

【小思考】 卷积与乘积在性质上有何异同?

根据需要利用这些性质，可以简化一些函数的卷积运算。

【例 3.3】 计算 $u(t+1)*u(t-3)$ 的卷积积分。

【解题思路与技巧】 遇到 $u(t)$ 进行卷积运算时，经常利用 $\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)$，由于 $\delta(t)*f(t)=f(t)$ 使卷积运算变得更为简单，因此该题利用卷积的微积分性质计算较为方便。

解: $u(t)*u(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)*\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau=\delta(t)*tu(t)=tu(t)$

由卷积的时移性质有

$$u(t+1)*u(t-3)=(t-2)u(t-2)$$

【例 3.4】 若 $f_1(t)=(1+t)[u(t)-u(t-1)]$，$f_2(t)=u(t-1)-u(t-2)$，求 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$。

【解题思路与技巧】 本题可以利用卷积的微积分性质求解，当然也可以用卷积的定义来求解。

解: 方法 1：利用卷积微积分性质求解

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}(1+\tau)[u(\tau)-u(\tau-1)]\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{1}{2}[(1+t)^2-1]u(t)-\frac{1}{2}[(1+t)^2-4]u(t-1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)=\delta(t-1)-\delta(t-2)$$

因此

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$$
$$=\frac{1}{2}(t^2-1)[u(t-1)-u(t-2)+\frac{1}{2}[4-(t-1)^2][u(t-2)-u(t-3)]$$

方法 2：利用卷积积分定义求解

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\tau)[u(\tau)-u(\tau-1)][u(t-\tau-1)-u(t-\tau-2)\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{1}{2}(t^2-1)[u(t-1)-u(t-2)+\frac{1}{2}[4-(t-1)^2][u(t-2)-u(t-3)]$$

【例 3.5】 计算 $tu(t-1)*\delta''(t-3)$ 的卷积积分。



【解题思路与技巧】 由于题目中有 $\delta''(t-3)$，显然，利用两次积分可以将它变成 $\delta(t-3)$，使计算变得简单。因此可以先利用微积分性质，然后再利用时移性质进行计算。

解：
$$\begin{aligned} tu(t-1)*\delta''(t-3) &= [u(t-1)+(t-1)u(t-1)]*\delta''(t-3) \\ &= u(t-1)*\delta''(t-3)+(t-1)u(t-1)*\delta''(t-3) \\ &= [u(t)*\delta''(t)+tu(t)*\delta''(t)]_{t=t-4} \end{aligned}$$

由于

$$u(t)*\delta''(t)=u'(t)*\delta'(t)=\delta'(t)$$

$$\begin{aligned} tu(t)*\delta''(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[tu(t)]*\delta'(t)=[u(t)+t\delta(t)]*\delta'(t) \\ &= u(t)*\delta'(t)=u'(t)*\delta(t)=\delta(t) \end{aligned}$$

由时移性质有

$$tu(t-1)*\delta''(t-3)=\delta'(t-4)+\delta(t-4)$$

【例 3.6】 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的信号如图 3.2 所示，求 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$。

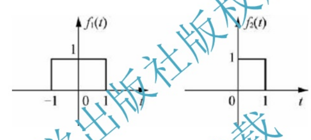


图 3.2 $f_1(t)$与 $f_2(t)$的信号

【解题思路与技巧】 由于两个信号均为门信号，将门信号微分可以变成冲激信号，因此，此题也可以利用卷积的微积分性质计算。该题还可以利用 $u(t)*u(t)=tu(t)$ 来进行计算。

解：解法一 $$f(t)=f_1^{(-1)}(t)*f'_2(t)$$

由于

$$f_1(t)=u(t+1)-u(t-1) \qquad f_2(t)=u(t)-u(t-1)$$

得

$$f_1^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

由于 $$f_1(t)=1 \qquad -1<t<1$$

当 $-1<t<1$ 时，$\int_{-1}^{t}\mathrm{d}\tau=t+1$，

当 $t>1$ 时，$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\tau=2$，

故

$$\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau=(t+1)[u(t+1)-u(t-1)]+2u(t-1)$$

$$\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t) - \delta(t-1)$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= f_1(t) * f_2(t) = \frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t} * \int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\
&= [\delta(t) - \delta(t-1)] * \{(t+1)[u(t+1) - u(t-1)] + 2u(t-1)\} \\
&= (t+1)u(t+1) - tu(t-1) + u(t-1) - [tu(t) - (t-1)u(t-2) + u(t-2)] \\
&= (t+1)u(t+1) - tu(t-1) + u(t-1) - tu(t) + (t-1)u(t-2) - u(t-2) \\
&= \begin{cases} t+1 & -1 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 2-t & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}$$

解法二 由图 3.2 可知

$$f_1(t) = u(t+1) - u(t-1) \qquad f_2(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= f_1(t) * f_2(t) = [u(t+1) - u(t-1)] * [u(t) - u(t-1)] \\
&= y(t+1) - y(t) - y(t-1) + y(t-2)
\end{aligned}$$

由于

$$y(t) = u(t) * u(t) = tu(t)$$

因此

$$f(t) = (t+1)u(t+1) - tu(t) - (t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

【例 3.7】 若信号 $f(t)$ 为一个门信号，如图 3.3 所示。

求 $y(t) = f(t) * f(t)$。

图 3.3 例 3.7 题图

【解题思路与技巧】 该题是门信号，有两个阶跃信号组成，因此使用卷积的微积分性质容易求得。此题重点需要掌握的是“两个门信号的卷积是三角波信号”，应用这个结论在以后的解题中非常方便。

解： 由图 3.3 可知

$$f(t) = \mathrm{E}[u(t+1) - u(t-1)]$$

$$f'(t) = \mathrm{E}[\delta(t+1) - \delta(t-1)]$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= f(t) * f(t) = f^{(-1)}(t) * f'(t) = g(t) * \mathrm{E}[\delta(t+1) - \delta(t-1)] \\
&= \mathrm{E}[g(t+1) - g(t-1)]
\end{aligned}$$

下面求 $f(t)$ 的积分

$$g(t) = f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

当 $-t_0 < t < t_0$ 时，$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = E(t+t_0)$

当 $t > t_0$ 时，$\qquad g(t) = \int_{-t_0}^{t_0} f(\tau)\mathrm{d}\tau = 2Et_0$



画出 $g(t)$ 的波形，如图 3.4 所示。

画出 $g(t+t_0)$ 的波形，如图 3.5 所示。

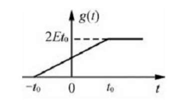


图 3.4　$g(t)$的波形图

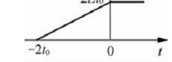


图 3.5　$g(t+t_0)$的波形图

画出 $g(t-t_0)$ 的波形，如图 3.6 所示。

画出 $y(t)=\mathrm{E}[g(t+t_0)-g(t-t_0)]$ 的波形，如图 3.7 所示。

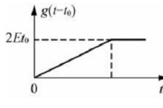


图 3.6　$g(t-t_0)$的波形图

图 3.7　$y(t)$的波形图

【例 3.8】　已知 $f_1(t)$ 波形如图 3.8 所示，$f_2(t)$ 为冲激序列，$f_2(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，画出当周期 T 为以下数值时的 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 的波形图。

(1) $T=3$　　(2) $T=2$　　(3) $T=1.5$

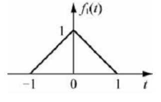


图 3.8　例 3.8 题图

【解题思路与技巧】　利用冲激序列与任意信号卷积的性质可以求得，本题需要注意的是卷积结果在冲激序列周期 T 不同时对卷积结果的影响。

解：(1) 当冲激序列周期 $T=3$ 时，卷积结果为

$$y(t)=f(t)*\delta_T(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-3n)$$

其波形如图 3.9(a)所示。

(2) 当冲激序列周期 $T=2$ 时，卷积结果为

$$y(t)=f(t)*\delta_T(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-2n)$$

其波形如图 3.9(b)所示。

(3) 当冲激序列周期 $T=1.5$ 时，卷积结果为

$$y(t)=f(t)*\delta_T(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-1.5n)$$

其波形如图 3.9(c)所示。

(a) T=3波形图

(b) T=2波形图

(c) T=1.5波形图

图 3.9 例 3.8 卷积结果图

3.2 LTI 系统的微分算子方程

3.2.1 微分算子与积分算子

连续时间系统通常用微分方程来描述，即系统的输入与输出是通过它们的时间函数及其对时间 t 的各阶导数的线性组合联系起来。n 阶 LTI 系统的数学模型是 n 阶常系数线性微分方程，其一般形式为

$$\begin{aligned}&a_0\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}y(t)+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}y(t)+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+a_ny(t)\\&=b_0\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}f(t)+b_1\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}f(t)+\cdots+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+b_mf(t)\end{aligned}\tag{3-15}$$

为了求解方程简便，常把方程中出现的微分和积分符号用如下算子表示。

微分算子

$$p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},\qquad px=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\tag{3-16}$$

$$p^n=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n},\qquad p^nx=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}x\tag{3-17}$$



积分算子

$$\frac{1}{p} = \int_{-\infty}^{t} (\,)\mathrm{d}\tau, \quad \frac{1}{p}x = \int_{-\infty}^{t} x\mathrm{d}\tau \tag{3-18}$$

3.2.2　LTI 系统的微分算子方程

对于微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 3f(t) \tag{3-19}$$

利用微分算子可表示为

$$p^2 y(t) + 3py(t) + 2y(t) = pf(t) + 3f(t)$$

或者写为

$$(p^2 + 3p + 2)y(t) = (p+3)f(t) \tag{3-20}$$

这种含有微分算子的方程称为微分算子方程。

n 阶线性微分方程可以用算子方程表示为

$$\begin{aligned} & a_0 p^n y(t) + a_1 p^{n-1} y(t) + \cdots + a_{n-1} py(t) + a_n y(t) \\ = & b_0 p^m f(t) + b_1 p^{m-1} f(t) + \cdots + b_{m-1} pf(t) + b_m f(t) \end{aligned}$$

或者写为

$$\begin{aligned} & (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n) y(t) \\ = & (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_{m-1} p + b_m) f(t) \end{aligned} \tag{3-21}$$

【知识要点提醒】

微分算子方程仅仅是微分方程的一种简化表示，微分算子方程等号两边的表达式表示分别对函数 $y(t)$ 和 $f(t)$ 进行相应的微分运算，而不是代数运算。

若进一步令

$$\begin{cases} D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n \\ N(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_{m-1} p + b_m \end{cases} \tag{3-22}$$

分别表示算子多项式，则式(3-21)可以简化写为

$$D(p)y(t) = N(p)f(t) \tag{3-23}$$

也可改写为

$$y(t) = \frac{N(p)}{D(p)} f(t) = H(p)f(t) \tag{3-24}$$

式中：

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n} \tag{3-25}$$

$H(p)$ 代表了系统将输入转变为输出的作用，或系统对输入的传输作用，故称 $H(p)$ 为响应 $y(t)$ 对激励 $f(t)$ 的传输算子或系统的传输算子。

算子 p 表示的是微分和积分运算，在计算时可以参照代数运算方法进行化简。

【小思考】 算子方程 $py(t)=pf(t)$ 与 $y(t)=f(t)$ 含义相同吗？

3.2.3 电路微分算子方程的建立

用算子符号表示微分方程不仅书写简便，而且在建立电路系统的数学模型时很方便。把电路系统中各基本元件(R、L、C)上的伏安关系(VAR)用微分算子形式表示，可以得到相应的算子模型，见表 3-2。

表 3-2 电路元件的算子模型

元件名称	时域模型	$u-i$ 关系(VAR)	VAR 的算子形式	算子模型
电阻	R，$i(t)$，$+$ $u(t)$ $-$	$u(t)=Ri(t)$	$u(t)=Ri(t)$	R，$i(t)$，$+$ $u(t)$ $-$
电感	L，$i(t)$，$+$ $u(t)$ $-$	$u(t)=L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$	$u(t)=pLi(t)$	pL，$i(t)$，$+$ $u(t)$ $-$
电容	C，$i(t)$，$+$ $u(t)$ $-$	$u(t)=\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)\mathrm{d}\tau$	$u(t)=\dfrac{1}{pC}i(t)$	$\dfrac{1}{pC}$，$i(t)$，$+$ $u(t)$ $-$

电路中基本元件用算子模型表示得到算子电路，再利用电路定律建立系统的算子方程，最后将算子方程转换为微分方程。pL 和 $\dfrac{1}{pC}$ 可以理解为算子感抗和算子容抗。下面举例说明由算子电路写系统的算子方程及微分方程的方法。

【例 3.9】 电路如图 3.10 所示，$f(t)$ 为激励信号，试列出求 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 的微分方程。

【解题思路与技巧】 建立电路系统的时域微分方程，首先将电路模型转换为电路算子模型，然后根据电路基本定理(如基尔霍夫电压定理，基尔霍夫电流定理等理论)，用代数方程的方法建立电路的算子方程，最后再把算子方程转换为微分方程。

解： 对应的算子电路如图 3.11 所示。

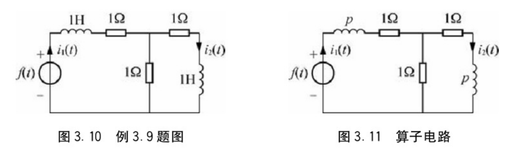


图 3.10 例 3.9 题图　　　　图 3.11 算子电路

列出网孔电流方程为



$$\begin{cases}(2+p)i_1(t)-i_2(t)=f(t)\\-i_1(t)+(2+p)i_2(t)=0\end{cases}$$

解得 $i_1(t)$ 及 $i_2(t)$ 的算子方程为

$$i_1(t)=\frac{2+p}{p^2+4p+3}f(t)$$

$$i_2(t)=\frac{1}{p^2+4p+3}f(t)$$

微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}+3i_1(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+2f(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+3i_2(t)=f(t)$$

【例 3.10】 电路如图 3.12(a)所示，$u_i(t)$ 为激励信号，响应为 $u_o(t)$，试列出算子方程与微分方程。

【解题思路与技巧】 与例 3.9 相同。

解： 写出对应的算子等效电路如图 3.12(b)所示。

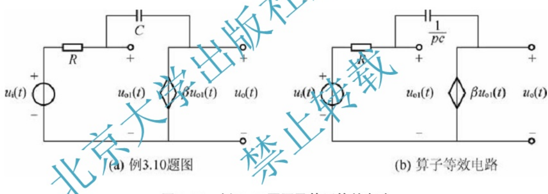


图 3.12　例 3.10 题图及算子等效电路

方法 1： 列 KVL 算子方程

$$u_{o1}(t)+\frac{u_{o1}(t)-u_o(t)}{\frac{1}{pc}}R=u_i(t)$$

将 $u_{o1}(t)=\frac{u_o(t)}{\beta}$ 代入上式，可得

$$\left[\frac{u_o(t)}{\beta}-u_o(t)\right]pRc+\frac{u_o(t)}{\beta}=u_i(t)$$

$$(1-\beta)pRcu_o(t)+u_o(t)=\beta u_i(t)$$

$$u_o(t)=\frac{\beta}{(1-\beta)pRc+1}u_i(t)$$

方法 2： 列 $u_{o1}(t)$ KVL 算子方程

$$u_{o1}(t)=u_C(t)+u_o(t)=u_C(t)+\beta u_{o1}(t)$$

$$(1-\beta)u_{o1}(t)=u_C(t)$$

$$u_{o1}(t)=\frac{u_C(t)}{1-\beta}=\frac{1}{1-\beta}\cdot\frac{u_i(t)-u_{o1}(t)}{R}\cdot\frac{1}{pc}=\frac{u_i(t)-u_{o1}(t)}{(1-\beta)pRc}$$

$$[(1-\beta)pRc+1]u_{o1}(t)=u_i(t)$$

$$u_{o1}(t)=\frac{1}{(1-\beta)pRc+1}u_i(t)$$

$$u_o(t)=\beta u_{o1}(t)=\frac{\beta}{(1-\beta)pRc+1}u_i(t)$$

方法3：

$$i(t)R+u_{o1}(t)=u_i(t)$$

将 $i(t)=pc[u_{o1}(t)-pu_{o1}(t)]$ 代入上式，得

$$pRc[u_{o1}(t)-pu_{o1}(t)+u_{o1}(t)=u_i(t)$$

由 $u_o(t)=pu_{o1}(t)$ 得 $u_{o1}(t)=\frac{u_o}{\beta}$ 代入上式，得

$$pRc\left[\frac{u_o(t)}{\beta}-u_o(t)\right]+\frac{u_o(t)}{\beta}=u_i(t)$$

经整理可得

$$[pRc(1-\beta)+1]u_o(t)=\beta u_i(t)$$

$$u_o(t)=\frac{\beta}{(1-\beta)pRc+1}u_i(t)$$

传输算子

$$H(p)=\frac{\beta}{(1-\beta)pRc+1}$$

微分方程为

$$(1-\beta)Rc\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_o(t)+u_o(t)=\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_i(t)$$

3.3 连续时间系统的零输入响应

对于一个 LTI 系统来讲，可以用一个 n 阶常系数线性微分方程来表示。

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}a_i y^{(i)}(t)=0\\ y(0_-),y'(0_-),y''(0_-),\cdots,y^{(n)}(0_-)\end{cases}\tag{3-26}$$

微分方程的解即为系统的零输入响应，用 $y_{zi}(t)$ 表示。

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}a_i y^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j f^{(j)}(t)\\ y(0_-),y'(0_-),y''(0_-),\cdots,y^{(n)}(0_-)=0\end{cases}\tag{3-27}$$



微分方程的解即为系统的零状态响应，用 $y_{zs}(t)$ 表示。

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t) \\ y(0_-), y'(0_-), y''(0_-), \cdots, y^{(n)}(0_-)\end{cases} \tag{3-28}$$

微分方程的解即为系统的全响应，用 $y(t)$ 表示。

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \tag{3-29}$$

连续时间系统的微分方程建立以后，就可以对微分方程求解。下面分别介绍连续时间系统零输入响应、零状态响应和全响应的计算方法。在计算过程中，求解微分方程的零输入响应时，需要用到系统初始条件。

【知识要点提醒】 在求解系统响应 $y(t)$ 时，给出的初始条件为 $y(0_-)$ 或 $y(0_+)$，对不同的求解方法，用到的初始条件是不同的，当用零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$ 求解微分方程时，初始条件用 $y(0_-)$，当用通解 $y_h(t)$ 和特解 $y_p(t)$ 求解微分方程的解时，初始条件用 $y(0_+)$。

【小思考】 $y(0_-)$ 与 $y(0_+)$ 之间有何关系？

由系统分析可知，系统的响应是由系统的初始状态与输入激励共同作用的结果。在系统时域分析中可以将系统的初始状态也作为一种输入激励，这样根据系统的线性特性，可将系统的响应看作是初始状态与输入激励分别作用于系统而产生的响应叠加。其中由初始状态单独作用于系统产生的输出称为零输入响应，记作 $y_{zi}(t)$；而由输入激励单独作用于系统产生的输出称为零状态响应，记作 $y_{zs}(t)$，则系统的完全响应 $y(t)$ 为

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t),\ t > 0 \tag{3-30}$$

当输入信号为零，即 $f(t) = 0$ 时，系统的输出为零输入响应，其解由齐次微分方程求得

$$D(\lambda)y_{zi}(t) = (a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_0)y_{zi}(t) = 0 \tag{3-31}$$

即

$$D(\lambda)y_{zi}(t) = 0 \tag{3-32}$$

$y_{zi}(t)$ 就是齐次方程式的解。式中 $D(\lambda)$ 称为系统的特征多项式，方程 $D(\lambda) = 0$ 是系统的特征方程，特征方程的根称为系统的特征根 $\lambda_i(i = 1,2,\cdots,n)$，因为它具有频率的量纲，又称为特征频率(也可称为自然频率或固有频率)。由特征根可求出齐次解的形式如下

(1) 当特征根是不等实根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 时，

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \tag{3-33}$$

(2) 当特征根是相等实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ 时，

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + \cdots + c_n t^{n-1} e^{\lambda t} \tag{3-34}$$

(3) 当特征根是一对单复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ 时，

$$y_{zi}(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t) \tag{3-35}$$

上式中的 $c_i, i = 1,2,\cdots,n$ 为待定系数，由系统的起始状态确定。



需要注意的是：待定系数 $c_i, i=1,2,\cdots,n$ 可以是实数，也可以是复数。

下面通过例题具体说明系统的零输入响应的求解过程。

【例 3.11】 已知系统的微分方程与起始状态分别如下

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}y(t)+2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+f(t) \qquad y(0_-)=y'(0_-)=0, y''(0)=1$$

求其零输入响应 $y_{zi}(t)$。

【解题思路与技巧】 在求解系统的零输入响应时，首先要求出系统的特征方程，由此求出系统的特征根，然后根据根的形式代入齐次方程的解，即式(3-31)、式(3-32)或式(3-33)，最后代入系统的起始条件 $y(0_-)$，注意不能代入 $y(0_+)$。

解： 系统的特征方程

$$D(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda^2+2\lambda+1)=0$$

特征根为 $$\lambda_1=0, \lambda_{2,3}=-1$$

零输入响应

$$y_{zi}(t)=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}+c_3 t\mathrm{e}^{\lambda_3 t}=c_1+c_2\mathrm{e}^{-t}+c_3 t\mathrm{e}^{-t}$$

代入已知的初始状态可得

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ -c_2+c_3=0 \\ c_2-2c_3=1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c_1=1 \\ c_2=-1 \\ c_3=-1 \end{cases}$$

零输入响应

$$y_z(t)=1-\mathrm{e}^{-t}-t\mathrm{e}^{-t}, t>0$$

【例 3.12】 电路如图 3.13 所示，已知 $R_1=1\Omega$，$R_2=5\Omega$，$C=0.25\mathrm{F}$，$L=2\mathrm{H}$，$u_C(0_-)=6\mathrm{V}$，$i_L(0_-)=2\mathrm{A}$，求系统的零输入响应 $i_{Lzi}(t)$。

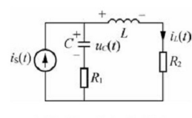


图 3.13 例 3.12 题图

【解题思路与技巧】 建立电路系统的微分方程，利用电路的基本定律和基本方法，并结合电容和电感的电流电压关系即可，本图中需要重视的是给出的初始条件是 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$，而解题需要的初始条件是 $i_L(0_-), i'_L(0_-)$ 因此本题还要先求出电路响应的初始条件 $i'_L(0_-)$。

解： (1) 建立微分方程

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+(R_1+R_2)i_L(t)=R_1 i_s(t)+u_C(t) \\ i_s(t)-i_L(t)=c\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

经整理，可得

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2}+(R_1+R_2)i_L(t)+\frac{1}{C}i_L(t)=R_1\frac{\mathrm{d}i_s(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}i_s(t)$$

代入参数，可得

$$2\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2}+6\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+4i_L(t)=\frac{\mathrm{d}i_s(t)}{\mathrm{d}t}+4i_s(t)$$

(2) 求零输入响应

零输入响应是齐次方程的解

$$(2\lambda^2+6\lambda+4)i_L(t)=0$$

解得特征根

$$\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=-2$$

零输入响应

$$i_{Lzi}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t} \quad t>0$$

(3) 求初始条件

已知 $i_L(0_-)=2A$，$u_C(0_-)=6V$，求 $i'_L(0_-)$。

画出 $t=0_-$ 时的等效电路如图 3.14 所示。

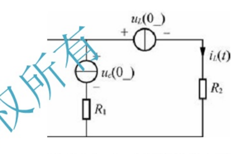
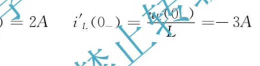


图 3.14 $t=0_-$ 时的等效电路

$$u_L(0_-)=u_C(0_-)-(R_1+R_2)i_L(0_-)=6-(1+5)\times 2=-6$$

(4) 确定待定系数

由初始条件



$$i_L(0_-)=2A \quad i'_L(0_-)=\frac{u_L(0_-)}{L}=-3A$$

代入方程

$$i_{Lzi}(t)=c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}$$

$$i'_{Lzi}(t)=-c_1\mathrm{e}^{-t}-2c_2\mathrm{e}^{-2t}$$

解得 $c_1=1 \quad c_2=-1$

因此，零输入响应

$$i_{Lzi}(t)=\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \qquad t>0$$

3.4 系统的冲激响应

3.4.1 系统冲激响应的定义

连续时间系统可以用一个 n 阶线性常系数微分方程描述。

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k f^{(k)}(t) \\ y^{(k)}(t_0) = c_k \quad k = 0,1,\cdots,N-1 \end{cases} \tag{3-36}$$

其中，$y(t)$ 为系统的输出，$f(t)$ 为系统的输入，c_k 为使方程有唯一确定的解所必需的初始条件。

当系统的起始状态全部为零，且输入激励为单位冲激信号时，系统所产生的输出响应称为系统的冲激响应，记为 $h(t)$。由此可见，冲激响应是一种特殊条件下的系统零状态响应。

根据冲激响应的定义，当输入信号 $f(t)=\delta(t)$ 时，$y(t)=h(t)$。因此，$h(t)$ 应满足方程和初始条件为零两个条件，即

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta^{(k)}(t) \\ h^{(k)}(0_-) = 0 \quad k = 0,1,\cdots,N-1 \end{cases} \tag{3-37}$$

冲激响应示意图如图 3.15 所示。计算系统冲激响应 $h(t)$ 要求系统的初始状态为零，且输入激励为单位冲激信号 $\delta(t)$，因而冲激响应 $h(t)$ 仅取决于系统的内部结构及其元件参数。

图 3.15　系统的冲激响应示意图

系统冲激响应计算方法主要有微分算子法、微分方程两边函数项匹配法和两个因果 LTI 系统级联法。下面主要介绍用微分算子法求解系统的冲激响应 $h(t)$。

3.4.2　用算子法计算冲激响应

对于 n 阶微分算子方程

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_{m-1} p + b_m) f(t)$$

当 $f(t)=\delta(t)$ 时，$y(t)=h(t)$，所以冲激响应满足微分算子方程

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n) h(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_{m-1} p + b_m) \delta(t)$$

传输算子

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_{m-1} p + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n}$$

则

$$h(t) = H(p)\delta(t) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_{m-1} p + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n}\delta(t) \tag{3-38}$$



当 $m < n$ 时，$h(t)$ 可按下面方法求解。

(1) 当特征根是不等实根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 时，可将 $H(p)$ 作部分分式展开，式(3-38)可写成

$$h(t) = \left(\frac{c_1}{p-\lambda_1} + \frac{c_2}{(p-\lambda)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(p-\lambda)^r}\right)\delta(t) \tag{3-39}$$

式中，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为部分分式展开的系数。可以证明

$$h(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t})u(t) \tag{3-40}$$

(2) 当特征根中含有 r 重实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = \lambda$ 时，同样可将 $H(p)$ 进行部分分式展开，可写成

$$h(t) = \left(\frac{c_1}{p-\lambda} + \frac{c_2}{(p-\lambda)^2} + \cdots + \frac{c_r}{(p-\lambda)^r}\right)\delta(t) \tag{3-41}$$

相应的冲激响应为

$$h(t) = (c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + \cdots + c_r t^{r-1} e^{\lambda t})u(t) \tag{3-42}$$

式中，c_i 为部分分式展开系数，$i=1, 2, \cdots, n$。

当 $m = n$ 时，$H(p)$ 中含有常数项，因此 $h(t)$ 中必含有 $\delta(t)$ 项。

当 $m > n$ 时，$H(p)$ 中含有 p 的幂函数项，这样 $h(t)$ 中必含有 $\delta(t)$ 的导数项。

【例 3.13】 已知某线性时不变系统的微分方程式为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2f''(t) + 8f'(t) + 9f(t) \qquad t > 0$$

求系统的冲激响应 $h(t)$。

【解题思路与技巧】 首先将微分方程转换为算子微分方程，得到 $H(p)$，然后求出 $h(t)$。

解： 由微分方程可以写出对应的冲激响应的微分算子方程

$$(p^2 + 5p + 6)h(t) = (2p^2 + 8p + 9)\delta(t)$$

传输算子

$$H(p) = \frac{2p^2 + 8p + 9}{p^2 + 5p + 6} = 2 - \frac{2p + 3}{(p+2)(p+3)} = 2 + \frac{1}{p+2} - \frac{3}{p+3}$$

所以系统的冲激响应

$$h(t) = 2\delta(t) + (e^{-2t} - 3e^{-3t})u(t)$$

【例 3.14】 电路如图 3.16 所示，输入为激励源 $i(t)$，输出为 $u_c(t)$，求电路的冲激响应。

【解题思路与技巧】 首先将电路模型转换成电路算子方程，然后写出算子微分方程，从而得到 $H(p)$，再求出 $h(t)$。

解： 由 KCL 方程列出算子方程

$$i_L(t) + i_C(t) = i(t) \qquad \frac{u_c(t)}{p+7} + \frac{1}{12}pu_c(t) = i(t)$$

$$\left(\frac{1}{p+7} + \frac{1}{12}p\right)u_c(t) = i(t) \qquad u_c(t) = \frac{12p + 84}{p^2 + 7p + 12}i(t)$$

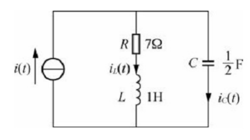


图 3.16　例 3.14 题图

$$H(p)=\frac{12p+84}{p^2+7p+12}=\frac{k_1}{p+3}+\frac{k_2}{p+4}=\frac{48}{p+3}-\frac{36}{p+4}$$

冲激响应

$$h(t)=(48\mathrm{e}^{-3t}-36\mathrm{e}^{-4t})u(t)$$

可见，系统的冲激响应只与系统的结构和参数有关，与系统的输入、起始状态无关。

3.5　连续时间系统的零状态响应

在不考虑系统初始时刻储能的作用(起始状态等于零)情况下，由系统的外加激励信号所产生的响应称为系统的零状态响应。系统零状态响应可以用下式来表示

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}a_i y^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j f^{(j)}(t)\\ y(0_-),y'(0_-),y''(0_-),\cdots,y^{(n)}(0_-)=0\end{cases}$$

$f(t)$ → 线性时不变系统$h(t)$ → $y_{zs}(t)$

(起始状态全部为零)

图 3.17　系统的输入输出关系

系统输入信号 $f(t)$ 与零状态响应 $y_{zs}(t)$ 之间的关系如图 3.17 所示。

在线性时不变系统中，如何求解零状态响应呢?

下面导出一般信号 $f(t)$ 激励下零状态响应的求解方法。

由冲激响应定义，当输入为 $f(t)=\delta(t)$ 时，在零状态条件下系统的输出为 $y_{zs}(t)=h(t)$，记为 $\delta(t)\xrightarrow{\text{响应}}h(t)$。

由系统的时不变性

$$\delta(t-\tau)\xrightarrow{\text{响应}}h(t-\tau)$$

由系统的齐次性

$$f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau\xrightarrow{\text{响应}}f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

由系统的叠加性

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau\xrightarrow{\text{响应}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

则由卷积性质和卷积的定义



$$f(t) \xrightarrow{\text{响应}} f(t) * h(t)$$

即对于线性时不变系统，任意信号 $f(t)$ 作用下的零状态响应是系统的输入与系统的冲激响应的卷积

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) \tag{3-43}$$

【知识要点提醒】 有时还经常用到一种特殊情况，即当输入信号为阶跃信号 $u(t)$ 时，系统的输出称为阶跃响应 $g(t)$。

由于

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{响应}} h(t)$$

而

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

由叠加性

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau \xrightarrow{\text{响应}} \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

即系统的阶跃响应为

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3-44}$$

也可以表示为

$$h(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t) = g'(t) \tag{3-45}$$

【例 3.15】 已知一线性时不变系统的冲激响应为 $h(t) = (-4\mathrm{e}^{-2t} + 6\mathrm{e}^{-3t})u(t)$，系统的激励为单位阶跃函数 $f(t) = u(t)$，试求系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

【解题思路与技巧】 利用卷积的方法对零状态响应 $y_{zs}(t) = f(t) * h(t)$ 求解。

解： 由系统零状态响应

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= f(t) * h(t) = u(t) * (-4\mathrm{e}^{-2t} + 6\mathrm{e}^{-3t})u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-4\mathrm{e}^{-2\tau} + 6\mathrm{e}^{-3\tau})u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} (-4\mathrm{e}^{-2\tau} + 6\mathrm{e}^{-3\tau})\mathrm{d}\tau \\ &= 2(\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t})u(t) \end{aligned}$$

【例 3.16】 某 LTI 系统的框图如图 3.18 所示。

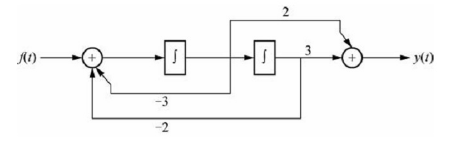


图 3.18　例 3.16 题框图

已知系统的起始状态

$$y'(0_-)=y(0_-)=1$$

输入信号

$$f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

求零输入响应 $y_{zi}(t)$，零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和全响应 $y(t)$。

【解题思路与技巧】 首先需要通过系统框图写出系统的微分方程，然后求解微分方程的零输入响应，零状态响应和全响应。

解：（1）求系统的微分方程

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+3f(t)$$

（2）求零输入响应

由微分方程写出算子方程

$$H(\lambda)=\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}=\frac{2\lambda+3}{\lambda^2+3\lambda+2}$$

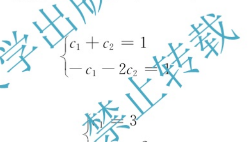
由特征方程求出特征根

$$\lambda^2+3\lambda+2=0 \qquad \lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=-2$$

可得

$$y_{zi}(t)=c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-2t} \qquad t>0$$

代入起始状态值可得



$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ -c_1-2c_2=1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c_1=3 \\ c_2=-2 \end{cases}$$

零输入响应

$$y_{zi}(t)=3\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \qquad t>0$$

（3）求冲激响应

由传输算子

$$H(\lambda)=\frac{2\lambda+3}{\lambda^2+3\lambda+2}=\frac{1}{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda+2}$$

所以冲激响应

$$h(t)=(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

（4）求零状态响应

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= f(t)*h(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)*(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t})u(t) \\ &= t\mathrm{e}^{-t}u(t)+(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

（5）全响应

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(t+4)\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t} \qquad t>0$$

【例 3.17】 已知 LTI 系统由 A、B、C 组成，如图 3.19 所示。

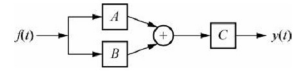


图 3.19　例 3.17 题框图

已知 $h_A(t)=\frac{1}{2}e^{-4t}u(t)$，$B$、$C$ 的阶跃响应为 $g_B(t)=(1-e^{-t})u(t)$，$g_C(t)=2e^{-3t}u(t)$，输入信号 $f(t)=u(t)-u(t-2)$。

求系统的冲激响应为 $h(t)$，阶跃响应 $g(t)$ 和零状态响应 $y(t)$。

【解题思路与技巧】 首先由系统框图写出系统的冲激响应 $h(t)$，在求解过程中，需要先将 B、C 的阶跃响应变成冲激响应 $h_B(t)$ 和 $h_C(t)$，然后利用系统的串并联解出冲激响应 $h(t)$。

解：(1) 系统的冲激响应为 $h(t)$

$$h_B(t)=g'_B(t)=e^{-t}u(t)$$
$$h_C(t)=g'_C(t)=2\delta(t)-6e^{-3t}u(t)$$
$$\begin{aligned}h(t)&=[h_A(t)+h_B(t)]*h_C(t)\\&=\left[\frac{1}{2}e^{-4t}u(t)+e^{-t}u(t)\right]*[2\delta(t)-6e^{-3t}u(t)]\\&=(4e^{-4t}-e^{-t})u(t)\end{aligned}$$

(2) 系统的阶跃响应为 $g(t)$

$$\begin{aligned}g(t)&=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}(4e^{-4\tau}-e^{\tau})u(\tau)d\tau\\&=\int_{0}(4e^{-4\tau}-e^{-\tau})d\tau=(e^{-t}-e^{-4t})u(t)\end{aligned}$$

(3) 求系统的零状态响应 $y(t)$

方法 1：

$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=[u(t)-u(t-2)]*(4e^{-4t}-e^{-t})u(t)$

由公式

$$u(t)*e^{-\alpha t}u(t)=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})u(t)$$

故有

$$u(t)*(4e^{-4t}-e^{-t})u(t)=(e^{-t}-e^{-4t})u(t)$$
$$u(t-2)*(4e^{-4t}-e^{-t})u(t)=(e^{-(t-2)}-e^{-4(t-2)})u(t-2)$$

零状态响应

$$y_{zs}(t)=(e^{-t}-e^{-4t})u(t)-(e^{-(t-2)}-e^{-4(t-2)})u(t-2)$$

方法 2：

因为已经求得阶跃响应

$$g(t) = (e^{-t} - e^{-4t})u(t)$$

且

$$f(t) = u(t) - u(t-2)$$

根据时移性质

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= g(t) - g(t-2) \\ &= (e^{-t} - e^{-4t})u(t) - (e^{-(t-2)} - e^{-4(t-2)})u(t-2) \end{aligned}$$

方法3：

由卷积的微积分性质，有

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= f'(t) * h^{(-1)}(t) = \frac{d}{dt}[u(t) - u(t-2)] * \int_{-\infty}^{t} (4e^{-4\tau} - e^{-\tau})u(\tau)d\tau \\ &= [\delta(t) - \delta(t-2) * g(t) = [g(t) - g(t-2) \end{aligned}$$

式中

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} (4e^{-4\tau} - e^{-\tau})u(\tau)d\tau = (e^{-t} - e^{-4t})$$

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= g(t) - g(t-2) \\ &= (e^{-t} - e^{-4t})u(t) - (e^{-(t-2)} - e^{-4(t-2)})u(t-2) \end{aligned}$$

【小思考】 求连续时间系统的时域响应有哪些步骤?

3.6 系统微分方程的经典解法与零输入响应和零状态响应解法的区别

用经典解法来求解系统微分方程的输出响应在高等数学中已经学过，在这里我们简单回顾一下，并与零输入响应和零状态响应解法进行比较，以便更清楚地掌握两种方法的区别。

3.6.1 微分方程的经典解法

经典分析中，微分方程的全解由通解 $y_h(t)$ 和特解 $y_p(t)$ 组成，即

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \tag{3-46}$$

通解是齐次微分方程

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dt}y(t) + a_n y(t) = 0$$

的解，它的基本形式为 $ke^{\lambda t}$。将 $ke^{\lambda t}$ 代入上式，得

$$ka_0\lambda^n e^{\lambda t} + ka_1\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \cdots + ka_{n-1}\lambda e^{\lambda t} + ka_n e^{\lambda t} = 0$$

由于 $k=0$ 对应的解是无意义的，在 $k \neq 0$ 的条件下可得

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{3-47}$$



式(3-47)称为微分方程所对应的特征方程，这与前面利用微分算子方程得出的结论是一致的。解特征方程求得特征根 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，由特征根可写出通解的形式如下。

（1）当特征根是不等实根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 时，通解为

$$y_h(t)=k_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+k_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}+\cdots+k_n\mathrm{e}^{\lambda_n t} \tag{3-48}$$

（2）当特征根是相等实根 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$ 时，通解为

$$y_h(t)=k_1\mathrm{e}^{\lambda t}+k_2t\mathrm{e}^{\lambda t}+\cdots+k_nt^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{3-49}$$

（3）当特征根是一对共轭复根 $\lambda_1=\sigma_1\pm \mathrm{j}\omega_1,\lambda_2=\sigma_2\pm \mathrm{j}\omega_2,\cdots,\lambda_l=\sigma_l\pm \mathrm{j}\omega_l,(l=n/2)$ 时，通解为

$$y_h(t)=\mathrm{e}^{\sigma_1 t}(k_{11}\cos\omega_1 t+k_{12}\sin\omega_1 t)+\cdots+\mathrm{e}^{\sigma_l t}(k_{1l}\cos\omega_l t+k_{2l}\sin\omega_l t) \tag{3-50}$$

以上各式中的 $k_{1i},k_{2i}(i=1,\cdots,n)$ 为待定系数，由初始状态确定。

特解的形式与激励信号的形式有关。将特解与激励信号代入原微分方程，求出特解表示式中的待定系数，即得特解。常用激励信号所对应的特解表示式见表 3－3，供求解方程时选用。

表 3－3　激励信号与相应的特解形式

激 励 信 号	特　　解
E(常数)	B
t^p	$B_1t^p+B_2t^{p-1}+\cdots+B_pt+B_{p+1}$
e^{at}（特征根 $\lambda\neq a$）	$B\mathrm{e}^{at}$
e^{at}（特征根 $\lambda=a$）	$Bt\mathrm{e}^{at}$
$\cos\omega t$	$B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t$
$\sin\omega t$	

得到通解的表示式和特解后，将两者相加可得全解的表示式。利用已知的 n 个初始条件 $y^{(k)}(0_+)=\left[y(0_+),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(0_+),\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}y(0_+)\right]$，即可求得通解表示式中的待定系数，从而得到微分方程的全解。下面通过例题来说明微分方程的经典时域分析法。

【例 3.18】 给定系统微分方程

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3f(t)\qquad t>0$$

初始条件 $y(0_+)=1$，$y'(0_+)=1$，输入信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，求系统的完全响应 $y(t)$。

【解题思路与技巧】 用经典法求系统响应时，应注意求解步骤，首先求通解，然后求特解，再求全解，最后代入系统的初始状态 $y(0_+)$，特别要注意：要代入 $y(0_+)$，而不是 $y(0_-)$。

解：（1）求齐次方程 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=0$ 的通解 $y_h(t)$。

特征方程

$$\lambda^2+5\lambda+6=0$$

特征根

$$\lambda_1=-2,\lambda_2=-3$$

通解

$$y_h(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{-3t}\quad t>0$$

(2) 非齐次方程 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3f(t)$ 的一个特解 $y_p(t)$。

设

$$y_p(t)=P\mathrm{e}^{-t}\quad t>0$$

将特解代入原方程可求得常数

$$P=\frac{1}{2}$$

故方程的特解

$$y_p(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\quad t>0$$

(3) 求方程的全解。

全解的表示式为

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$$

代入初始条件，令 $t=0_+$ 可得

$$\begin{cases}C_1+C_2+\frac{1}{2}=1\\-2C_1-3C_2-\frac{1}{2}=1\end{cases}$$

解得 $C_1=\frac{4}{3},C_2=-\frac{5}{6}$，方程的全解即系统的完全响应为

$$y(t)=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{5}{6}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$$

【知识要点提醒】 从上面例题可以看出，常系数线性微分方程的全解由通解和特解组成。通解的形式与系统的特征根有关，仅依赖于系统本身的特性，而与激励信号的形式无关，因此称为系统的固有响应。而特解的形式是由激励信号确定的，称为强迫响应。

3.6.2 具体的区别

为了掌握系统微分方程的经典解法与零输入响应和零状态响应解法的区别，我们先举一个例子进行说明。

【例 3.19】 电路如图 3.20 所示。

已知 $L=2\mathrm{H}$, $C=0.25\mathrm{F}$, $R_1=1\Omega$, $R_2=5\Omega$。电容上的初始电压 $u_c(0_-)=3\mathrm{V}$，电感上的初始电流 $i_L(0_-)=1\mathrm{A}$，激励信号 $i_s(t)=u(t)=1\mathrm{A}$。试求电感上电流 $i_L(t)$ 的全响应。

解： 1. 建立微分方程

方法 1： 用建立算子方程的方法。

画出算子等效电路如图 3.21 所示。

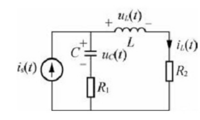


图 3.20　例 3.19 题图

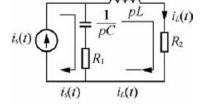


图 3.21　算子等效电路

$$\left(pL+R_2+R_1+\frac{1}{pC}\right)i_L(t)-\left(R_1+\frac{1}{pC}\right)i_s(t)=0$$

代入参数，经整理得

$$p^2 i_L(t)+3pi_L(t)+2i_L(t)=\frac{1}{2}pi_s(t)+2i_s(t)$$

电路微分方程

$$i''_L(t)+3i'_L(t)+2i_L(t)=\frac{1}{2}i'_s(t)+2i_s(t)$$

方法 2：直接建立电路微分方程。

列出电路 KVL 微分方程

$$u_C(t)+i_C(t)R_1=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+R_2 i_L(t)$$

对上式求导，并建立方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}+R_1\dfrac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}=L\dfrac{\mathrm{d}i_L^2(t)}{\mathrm{d}t^2}+R_2\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\\ i_c(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}\\ i_c(t)=i_s(t)-i_L(t)\end{cases}$$

代入参数，经整理得

$$i''_L(t)+3i'_L(t)+2i_L(t)=\frac{1}{2}i'_s(t)+2i_s(t)$$

2. 用求通解和特解的方法

由微分方程，在 $t>0$ 时，$i_s(t)=1\mathrm{A}$，$i'_s(t)=0$

微分方程可写为

$$i''_L(t)+3i'_L(t)+2i_L(t)=2$$

1）求通解

$$i''_L(t)+3i'_L(t)+2i_L(t)=0$$

特征方程

$$A(\lambda)=\lambda^2+3\lambda+2$$

特征根

$$\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=-2$$

齐次方程的解为

$$i_{Lh}(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-2t} \qquad t>0$$

2）特解

$$i_{LP}(t)=P$$

代入方程，解得

$$P=1$$

3）全解

$$i_L(t)=i_{Lh}(t)+i_{LP}(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}+1 \qquad t>0$$

4）确定初始状态和确定系数

已知 $i_L(0_+)=1\mathrm{A}$，画出 $t=0_+$ 时的等效电路如图 3.22 所示。

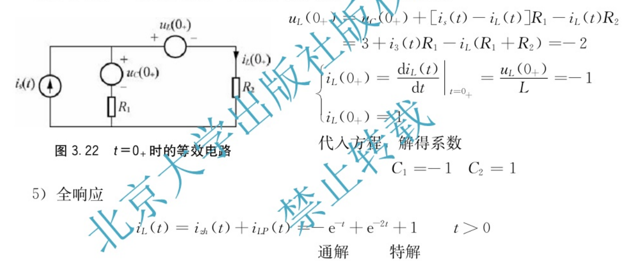


图 3.22　$t=0_+$ 时的等效电路

$$u_L(0_+)=u_C(0_+)+[i_s(t)-i_L(t)]R_1-i_L(t)R_2$$
$$=3+i_3(t)R_1-i_L(R_1+R_2)=-2$$

$$\begin{cases} i_L(0_+)=\left.\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\dfrac{u_L(0_+)}{L}=-1 \\ i_L(0_+)=1 \end{cases}$$

代入方程，解得系数

$$C_1=-1 \quad C_2=1$$

5）全响应

$$i_L(t)=i_{zh}(t)+i_{LP}(t)=\underbrace{-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}}_{\text{通解}}+\underbrace{1}_{\text{特解}} \qquad t>0$$

3. 用求零输入响应和零状态响应的方法

1）求零输入响应 $i_{zi}(t)$

齐次方程 $A(\lambda)y(t)=0$，即

$$i''_L(t)+3i'_L(t)+2i_L(t)=0$$

特征方程

$$A(\lambda)=\lambda^2+3\lambda+2$$

特征根

$$\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=-2$$

零输入响应

$$i_{Lzi}(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-2t} \quad t>0$$

求起始状态

已知 $i_L(0_-)=1\text{A}$，$u_C(0_-)=3\text{V}$，求 $i'_L(0_-)$。

画出 $t=0_-$ 时的等效电路如图 3.23 所示。

$$u_L(0_-)=u_C(0_-)-(R_1+R_2)i_L(0_-)$$
$$=3-(1+5)\times 1=-3$$

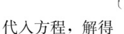
由于

$$i'_L(0_-)=\frac{\mathrm{d}i_L(0_-)}{\mathrm{d}t}=\frac{u_L(0_-)}{L}=-\frac{3}{2}$$

图 3.23 $t=0_-$ 时的等效电路

故得初始条件

$$\begin{cases} i_L(0_-)=1 \\ i'_L(0_-)=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$


代入方程，解得

$$C_1=\frac{1}{2} \quad C_2=\frac{1}{2}$$

故零输入响应

$$i_{Lzi}(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} \quad t>0$$

2）求零状态响应 $i_{zs}(t)$

由微分方程，可得

$$H(p)=\frac{\frac{1}{2}p+2}{p^2+3p+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{p+1}-\frac{2}{p+2}\right)$$

$$h(t)=\frac{1}{2}(3\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t}) \qquad t>0$$

零状态响应

$$i_{Lzs}(t)=h(t)*f(t)=h^{(-1)}(t)*f'(t)=h^{(-1)}(t)*\delta(t)=h^{(-1)}(t)$$
$$h^{(-1)}(t)=\int_0^t\frac{1}{2}(3\mathrm{e}^{-\tau}-2\mathrm{e}^{-2\tau})\mathrm{d}\tau=(-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+1)u(t)$$

因此

$$y_{zs}(t)=\left(-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+1\right)u(t)$$

3）全响应

$$i_L(t)=i_{Lzi}(t)+i_{Lzs}(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+(-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+1)$$
$$=-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}+1 \quad t>0$$

从上面的分析可以看出，系统的全响应 $y(t)$ 不仅可以分解为零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$，而且还可以分解成固有响应（通解）$y_h(t)$ 和强迫响应（特解）$y_p(t)$。这两种求解方法虽然有某些相似之处，但不论从含义上还是从解题步骤上都有明显的区别，下面从两个方面加以说明。

【知识要点提醒】

1. 两种分解的区别

（1）虽然固有响应和零输入响应都是齐次方程的解，但两者的系数各不相同，零输入响应的系数仅由系统的初始状态来决定，而固有响应的系数由系统的初始状态和激励共同决定。

（2）在初始状态为零时，系统的零输入响应为零，但在激励信号的作用下，固有响应并不为零，也就是说，固有响应包含零输入响应的全部和零状态响应的一部分。

2. 解题步骤

（1）系统响应分解为零输入响应和零状态响应，

即

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$

① 由齐次方程求零输入响应 $y_{zi}(t)$，得到系数 C_1、C_2、…、C_n。

② 代入初始状态 $y(0_-)$、$y^{(1)}(0_-)$、…、$y^{(n)}(0_-)$，确定系数 C_1、C_2、… C_n。

③ 求零状态响应 $y_{zs}(t)$。

④ 求全响应 $y(t)$。

（2）系统响应分解为固有响应和强迫响应，

即

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

① 求齐次方程的解，得到系数 C_1、C_2、…、C_n。

② 求特解，将特解代入方程，确定特解的系数 P_1、P_2、…、P_n。

③ 写出全响应方程 $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$。

④ 代入初始状态 $y(0_+)$、$y^{(1)}(0_+)$、…、$y^{(n)}(0_+)$，确定齐次方程的系数 C_1、C_2、…、C_n。

⑤ 求出全响应 $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$。

本章知识要点

1. 卷积积分

1）卷积的定义

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

2）卷积积分的计算方法

卷积积分的计算方法包括解析法、图解法(可参考其他教材)和用性质求解。



2. 卷积积分的性质

卷积积分的性质在卷积运算中占有很重要的地位，要求记住表 3-1 以便与性质配合灵活应用。

3. LTI 系统的微分算子方程

1）定义

微分算子 $p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，积分算子 $\frac{1}{p}=\int_{-\infty}^{t}(\,)\mathrm{d}\tau$

2）将 LTI 系统的微分方程转换为算子方程

3）电路微分算子方程的建立

4. 连续时间系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$

注意求解系统零输入响应时，初始条件要用 $y(0_-)$，即

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}a_i y^{(i)}(t)=0\\ y(0_-),y'(0_-),y''(0_-),\cdots,y^{(n)}(0_-)\end{cases}$$

5. 系统的冲激响应 $h(t)$

1）冲激响应的定义

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{N}a_k h^{(k)}(t)=\sum_{k=0}^{M}b_k\delta^{(k)}(t)\\ h^{(k)}(0_-)=0\quad k=0,1,\cdots,N-1\end{cases}$$

2）计算冲激响应计算方法

用算子法计算冲激响应。

6. 连续时间系统的零状态响应

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$$

7. 系统微分方程的经典解法与零输入响应和零状态响应解法的区别

1）微分方程的经典解法

系统响应分解为固有响应和强迫响应，即

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

① 求齐次方程的解，得到系数 C_1、C_2、…、C_n。

② 求特解，将特解代入方程，确定特解的系数 P_1、P_2、…、P_n。

③ 写出全响应方程 $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$。

④ 代入初始状态 $y(0_+)$、$y^{(1)}(0_+)$、…、$y^{(n)}(0_+)$，确定齐次方程的系数 C_1、C_2、…、C_n。

⑤ 求出全响应 $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$。

2）系统响应分解为零输入响应和零状态响应

即

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

(1) 由齐次方程求零输入响应 $y_{zi}(t)$，得到系数 C_1、C_2、…、C_n。

(2) 代入起始状态 $y(0_-)$、$y^{(1)}(0_-)$、…、$y^{(n)}(0_-)$，确定系数 C_1、C_2、…、C_n。

(3) 求零状态响应 $y_{zs}(t)$。

(4) 求全响应 $y(t)$。

习题 3

3.1　$f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的信号如图 3.24 所示，求 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$。

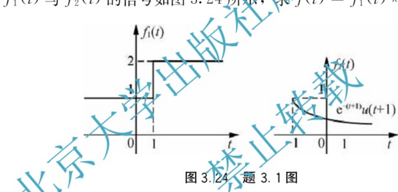


图 3.24　题 3.1 图

3.2　计算图 3.25 中 $f_1(t) * f_2(t)$ 卷积积分。

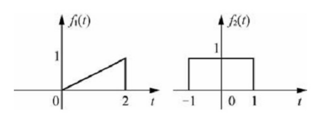


图 3.25　题 3.2 图

3.3　利用卷积的性质，求下列函数的卷积 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$。

(1) $f_1(t) = \cos(\omega t), f_2(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$

(2) $f_1(t) = u(t) - u(t-2), f_2(t) = u(t-1) - u(t-2)$

(3) $f_1(t) = e^{-t}u(t), f_2(t) = u(t-1)$

(4) $f_1(t) = \cos 2\pi t(u(t) - u(t-1)], f_2(t) = u(t)$

3.4　计算下列卷积。

(1) $[(t+2)u(t+2) - 2tu(t) + (t-2)u(t-2)] * [\delta(t+2) - \delta(t-2)]$

(2) $[(t+2)u(t+2)-2tu(t)+(t-2)u(t-2)]*[\delta'(t+2)-\delta'(t-2)]$

(3) $[2(t+1)u(t+1)-3tu(t)-(t-2)u(t-2)]*\delta'(2-t)$

(4) $t[u(t)-u(t-2)]*\delta(1-t)$　　　　(5) $1*\mathrm{e}^{-3t}u(t)$

3.5　试写出下列算子方程的微分方程式。

(1) $(p^2+3p+2)y(t)=(p+1)f(t)$　　　　(2) $y(t)=\dfrac{p+1}{p+3}f(t)$

(3) $(p+1)(p+2)y(t)=p(p+3)f(t)$

3.6　电路如图3.26所示，$f(t)$为激励信号，响应为$i_2(t)$，试列出算子方程与微分方程。

3.7　电路如图3.27所示，$u_i(t)$为激励信号，试列出求$u_o(t)$的算子方程和微分方程。

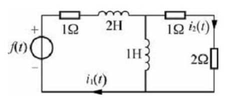


图3.26　题3.6图

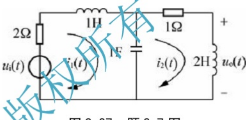


图3.27　题3.7图

3.8　写出图3.28所示的输入$f(t)$与输出$i_1(t)$、$i_2(t)$及$i_3(t)$之间的线性微分方程，并求转移算子。

3.9　电路如图3.29所示，求电流$i_1(t)$，$i_2(t)$和输出$u_o(t)$的微分方程。

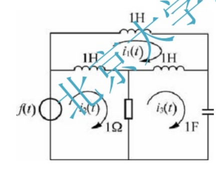


图3.28　题3.8图

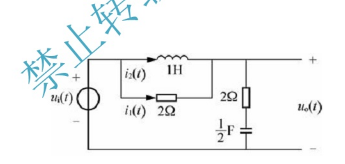


图3.29　题3.9图

3.10　已知系统的微分方程与初始条件分别为

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=0, y(0_-)=1, y'(0_-)=2$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}y(t)+3\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+f(t), y(0_-)=1, y''(0_-)=y'(0_-)=0$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}y(t)+2\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=3\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t), y''(0_-)=1, y(0_-)=y'(0_-)=0$

求系统的零输入响应$y_{zi}(t)$。

3.11　已知系统的微分方程与初始条件分别如下

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}y(t)+2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+f(t)\qquad y(0_-)=y'(0_-)=0, y''(0_-)=1$$

求其零输入响应 $y_{zi}(t)$。

3.12　已知某系统输入输出微分算子方程为

$$(p^3+3p^2+2p)y(t)=pf(t)$$

已知系统的初始条件 $y(0_-)=1, y'(0_-)=y''(0_-)=0$，求出其零输入响应 $y_{zi}(t)$。

3.13　连续时间系统框图如图 3.30 所示，求系统的微分方程。

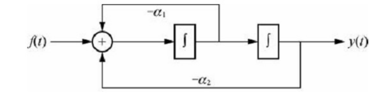


图 3.30　题 3.13 图

3.14　整个系统由两个子系统组成，框图如图 3.31 所示，两个子系统的微分方程分别为

子系统 1　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=y(t)+x(t)$　　子系统 2　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w(t)=2w(t)+y(t)$

求该系统的微分方程。

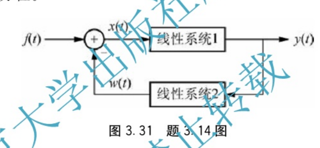


图 3.31　题 3.14 图

3.15　试求下列微分方程所描述的连续时间 LTI 系统的冲激响应 $h(t)$。

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+2f(t), t>0$

(2) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=4f(t), t>0$

(3) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+4y(t)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+5f(t), t>0$

3.16　图 3.32 所示系统，它由几个子系统组合而成，各子系统的冲激响应分别为 $h_1(t)=u(t)$(积分器)，$h_2(t)=\delta(t-1)$(时移器)，$h_3(t)=-\delta(t)$(倒相器)，试求总系统的冲激响应 $h(t)$。

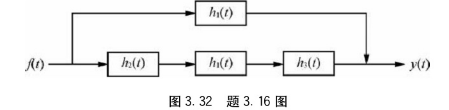


图 3.32　题 3.16 图

3.17　系统框图如图 3.33(a)所示，它由几个子系统组成，子系统 $h_1(t)$ 如图 3.33(b)





所示，$h_2(t)=\delta(t-1)+\delta(t-2)$。求系统的冲激响应 $h(t)$。

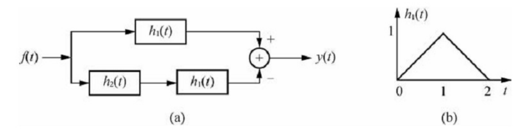


图 3.33　题 3.17 图

3.18　已知某线性时不变系统的输入信号为 $f(t)=u(t-3)-u(t-4)$，冲激响应为 $h(t)=u(t-7)-u(t-9)$，求出系统的零状态响应。

3.19　已知某线性时不变系统的输入信号为 $f(t)=u(t)$，冲激响应为 $h(t)=(4e^{-4t}-e^{-t})u(t)$，求出系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

3.20　某系统的微分方程为 $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+4\frac{d}{dt}y(t)+3y(t)=\frac{d}{dt}f(t)+f(t)$，系统的输入信号为 $f(t)=\sin t[u(t)-u(t-\pi)]$，求系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

3.21　某连续时间 LTI 系统的输入 $f(t)$ 和冲激响应 $h(t)$ 如图 3.34 所示，试求系统的零状态响应，并画出波形。

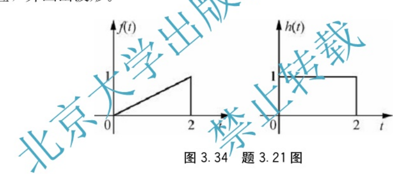


图 3.34　题 3.21 图

3.22　系统框图如图 3.35 所示的系统，试求当输入 $f(t)=e^{-t}u(t)$ 时，系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

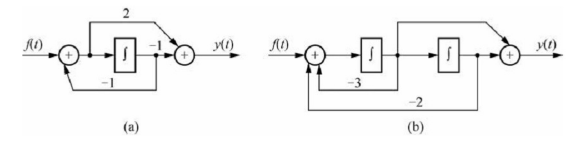


图 3.35　题 3.22 图

3.23　已知某连续时间 LTI 系统的微分方程为　$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=0$，$f(t)=10\cos t u(t)$。

(1) 求系统的单位冲激响应 $h(t)$；(2) 求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$；(3) 零状态响应 $y_{zs}(t)$；(4) 完全响应 $y(t)$。

3.24　系统输出 $y(t)$ 对输入 $f(t)$ 的转移算子为

$$H(p)=\frac{p+3}{p^2+3p+2}$$

且（1）$f(t)=u(t), y(0_-)=1, y'(0_-)=2$；

（2）$f(t)=e^{-3t}u(t), y(0_-)=1, y'(0_-)=2$。

试分别求其全响应 $y(t)$。

3.25　电路如图 3.36 所示，已知 $R_1=1\Omega, R_2=2\Omega, L=2\text{H}, C=\frac{1}{4}\text{F}, u_c(0_-)=3\text{V}, i_L(0_-)=1\text{A}, i_S(t)=u(t)$，求 $t>0$ 时的电流 $i_L(t)$。

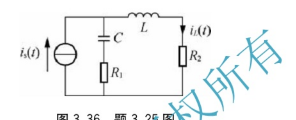


图 3.36　题 3.25 图

3.26　电路如图 3.37 所示，电路参数为 $E_1=1\text{V}, E_2=2\text{V}, L=2\text{H}, C=\frac{1}{2}\text{F}, R_1=1\Omega, R_2=2\Omega$。当 $t=0$ 时，将开关由稳态“1”打到“2”位置。

试求：（1）零输入响应 $y_{zi}(t)$；（2）零状态响应 $y_{zs}(t)$；（3）全响应 $y(t)$。

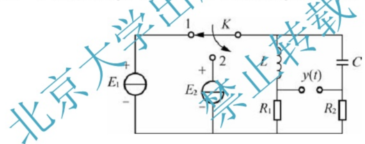


图 3.37　题 3.26 图

3.27　电路如图 3.38 所示，在 $t=0_-$ 时开关置于“1”位置，电路已进入稳态，在 $t=0_+$ 时，开关从“1”转至“2”位置。试求：

（1）电路的初始条件 $u_o(0_-)$，$u'_o(0_-)$，$u_o(0_+)$，$u'_o(0_+)$；

（2）求系统的全响应 $u_o(t)$。

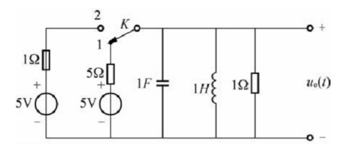


图 3.38　题 3.27 图

第4章

离散时间系统的时域分析



内容摘要

本章主要介绍离散时间系统的卷积和的定义、性质及其计算方法，离散时间系统的算子模型，离散时间系统的零输入响应及零状态响应。

教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识	工程应用方向
卷积和	熟悉定义 掌握计算方法	连续时间和离散时间卷积	离散时间系统分析分析
单位脉冲响应	掌握分析计算方法 掌握性质	求和计算	系统响应分析
离散时间系统分析	掌握分析方法	响应计算	系统响应分析

教学目标与要求

掌握离散时间卷积和的定义、性质和计算方法。

了解离散时间的算子方程。

掌握离散时间系统的零输入响应计算。

掌握离散时间系统的冲激响应、零状态响应和全响应的计算。

当系统的输入为离散时间信号时，所产生的输出也为离散时间信号的系统，称该系统为离散时间系统，简称离散系统。

离散系统的数学模型可以用差分方程来表示，离散系统的分析与连续系统的分析在很多方面有共同之处。比如，它也分为零输入响应 $y_{zi}(n)$ 和零输出响应 $y_{zs}(n)$，也可用齐次解 $y_h(n)$ 和特解 $y_p(n)$ 来计算完全响应，离散系统也有传输算子和单位脉冲响应。

4.1 用单位冲激的线性组合表示离散时间信号

对任意给定的离散时间信号 $f(n)$ 如图 4.1 所示，可以分解为一系列冲激信号的叠加，如图 4.2～图 4.4 所示。

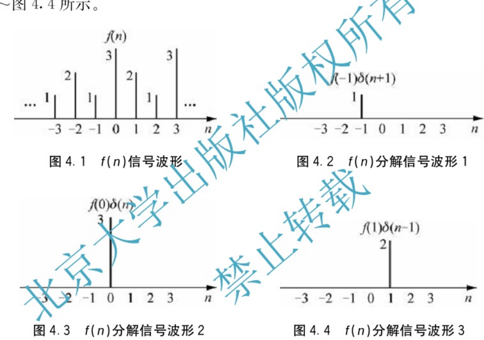


图 4.1　$f(n)$信号波形　　图 4.2　$f(n)$分解信号波形 1

图 4.3　$f(n)$分解信号波形 2　　图 4.4　$f(n)$分解信号波形 3

由图可以看出，$f(n)$ 就是位于各个时刻的，大小与位于该时刻的序列值相等的所有冲激序列的线性组合的信号，即 $f(n)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} f(n) = & \cdots f(-3)\delta(n+3) + f(-2)\delta(n+2) + f(-1)\delta(n+1) + f(0)\delta(n) \\ & + f(1)\delta(n-1) + f(2)\delta(n-2) + f(3)\delta(n-3) \end{aligned}$$

上式可以进一步写为

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(n-k) \tag{4-1}$$

【知识要点提醒】 这表明，任何有界序列都可以表示成由一串时移单位冲激序列的线性组合，线性组合的加权系数就是 $f(k)$。故上式就是用单位冲激序列的时移线性组合表示任意离散时间序列的一般表达式。



4.2 卷　积　和

与连续时间信号的卷积积分类似，卷积和是离散时间信号间的一种运算，经常用于求解离散时间系统的零状态响应，在离散信号与系统分析中占有十分重要的地位。

卷积和又称为离散时间卷积，简称为卷积。

4.2.1 卷积和的定义

对于一个离散时间 LTI 系统，如果 $f(n)$ 是任意输入信号，$y(n)$ 是相应的输出信号，由式(4-1)可知，任意的输入信号 $f(n)$ 可表示为时移冲激序列的线性组合。

当离散时间系统的输入信号为 $f(n)=\delta(n)$，则输出信号 $y(n)=h(n)$，称为离散时间 LTI 系统的单位冲激响应。根据时不变性，则有

$$\delta(n-k)\xrightarrow{\text{响应}}h(n-k),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{4-2}$$

再根据线性性，有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)\delta(n-k)\xrightarrow{\text{响应}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)h(n-k) \tag{4-3}$$

上式左边是输入 $f(n)$ 的线性组合，$f(k)$ 是加权系数，右边是输入信号 $f(n)$ 每个分量响应的线性叠加得到系统输出 $y(n)$，因此，离散时间 LTI 系统的输入输出信号变换关系表现为一个无限求和，或称为卷积和，通常表示为

$$y(n)=f(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)h(n-k) \tag{4-4}$$

其中，“$*$”表示卷积和运算。

【知识要点提醒】 卷积公式表明，任意时刻 n 的输出信号值是输入序列的加权和。具体地说，任意时刻 n 的输出值 $y(n)$ 等于输入信号 $f(k)$ 乘以 $h(n-k)$ 后，在 k 从 $-\infty$ 到 ∞ 上求和得到变量。

由于离散信号中的自变量 n 只能取整数（$0,\pm1,\pm2,\cdots$），式中的 k 也只能取整数。

4.2.2 常用序列的卷积和公式

为了应用方便，将常用序列的卷积和列于表 4－1 中备查。

表 4-1 卷积和表

序号	$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f_1(n)*f_2(n)=f_2(n)*f_1(n)$
1	$f(n)$	$\delta(n)$	$f(n)$
2	$f(n)$	$\delta(n-n_0)$	$f(n-n_0)$
3	$a^n u(n) \cdots (a \neq 1)$	$u(n)$	$\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$
4	$u(n)$	$u(n)$	$(n+1)u(n)$
5	$a^n u(n)$	$a^n u(n)$	$(n+1)a^n u(n)$
6	$a^n u(n)$	$nu(n)$	$\left[\frac{n}{1-a}+\frac{a(a^n-1)}{(1-a)^2}\right]u(n)$
7	$a_1^n u(n) \cdots (a_1 \neq a_2)$	$a_2^n u(n)$	$\frac{a_1^{n+1}-a_2^{n+1}}{a_1-a_2}u(n)$
8	$nu(n)$	$nu(n)$	$\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)u(n)$
9	$nu(n)$	$u(n)$	$\frac{1}{2}n(n+1)u(n)$
10	$a_1^n \cos(\omega_o n+\theta)u(n)$	$a_2^n u_{(n)}$	$\frac{a_1^{n+1}\cos[\omega_0(n+1)+\theta-\varphi]-a_2^{n+1}\cos(\theta-\varphi)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\omega_0}}u(n)$ $\varphi=\arctan\frac{a_1\sin(\omega_0)}{a_1\cos(\omega_0)-a_2}$

4.2.3 卷积和的性质

利用卷积和的性质可以进行卷积和运算以及系统分析，离散时间信号的卷积和主要有以下性质。

1. 交换律

$$f_1(n)*f_2(n)=f_2(n)*f_1(n) \tag{4-5}$$

交换律表明，两离散信号的卷积和可以由任意一个信号卷积另一个信号。

2. 分配律

$$f_1(n)*[f_2(n)+f_3(n)]=f_1(n)*f_2(n)+f_1(n)*f_3(n) \tag{4-6}$$

分配律表明：将输入信号加到两个并联子系统中，相当于将输入信号加到各子系统中的输出信号的叠加。



3. 结合律

$$[f_1(n)*f_2(n)]*f_3(n)=f_1(n)*[f_2(n)*f_3(n)]=f_2(n)*[f_1(n)*f_3(n)] \tag{4-7}$$

结合律表明：三个信号的卷积和是任意两个信号的卷积和与第三个信号的卷积和。需要注意的是，结合律是有条件的，只有当任意两个信号的卷积和存在时才成立。

4. 任意序列与$\delta(n)$的卷积

$$f(n)*\delta(n)=f(n) \tag{4-8}$$

5. 位移性

$$f(n)*\delta(n-N)=f(n-N) \tag{4-9}$$

由此，可以推广到任意两个离散时间信号为$f_1(n)$和$f_2(n)$。

若$y(n)=f_1(n)*f_2(n)$，则有

$$f_1(n-N)*f_2(n)=f_1(n)*f_2(n-N)=y(n-N) \tag{4-10}$$

进一步可得

$$f_1(n-N_1)*f_2(n-N_2)=y(n-N_1-N_2) \tag{4-11}$$

【知识要点提醒】 两个时移信号的卷积和的输出是$y(n)=f_1(n)*f_2(n)$的时移和。

4.2.4 卷积和的计算方法

根据卷积和的意义，卷积和的计算方法通常有解析法、卷积性质、竖式乘法、列表法和图解法等几种。

1. 用解析法求卷积和

所谓解析求法，就是利用定义对一个闭合的解析表达式来进行卷积和运算，直接获得运算结果的方法。

由卷积和的定义

$$y(n)=f(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)h(n-k)$$

【例 4.1】 已知某离散时间 LTI 系统的输入$f(n)$和单位冲激响应$h(n)$分别为

$f(n)=a^nu(n) \qquad 0<a<1 \qquad h(n)=u(n)$

求系统的输出$y(n)$。

【解题思路与技巧】 系统的输出$y(n)$是系统的输入$f(n)$与单位冲激响应$h(n)$的卷积和，用定义计算卷积，要利用无穷项等比函数求和公式。

解：根据卷积和的定义将$f(n)=a^nu(n)$和$h(n)=u(n)$直接代入卷积和运算公式，

则有

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^{k}u(k)u(n-k)$$

由于 $$u(k)=\begin{cases}1 & k\geqslant 0\\ 0 & k<0\end{cases} \quad 和 \quad u(n-k)=\begin{cases}1 & n\geqslant k\\ 0 & n<k\end{cases}$$

在 $n<0$ 时，有 $u(k)u(n-k)=0$

在 $n\geqslant 0$ 时，有 $u(k)u(n-k)=\begin{cases}1 & 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & k<0, k>n\end{cases}$

由前式可以看出：$u(k)$ 的求和下限从 $-\infty$ 变到 0，式中的 $u(n-k)$ 的求和区间上限从 ∞ 变到 n，由定义

$$y(n)=\left(\sum_{k=0}^{n}a^{k}\right)u(n)=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$$

在计算过程中，经常用到几何级数的求和公式，见表 4-2。

表 4-2 级数的求和公式

1	$S=\sum_{0}^{n}q^{n}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$（有限项等比函数求和）
2	$S=\sum_{0}^{\infty}q^{n}=\frac{a_1}{1-q}$（无穷项等比函数求和）
3	$\sum_{n=n_1}^{n_2}a^{n}=\begin{cases}\frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a}\cdots a\neq 1\\ n_2-n_1+1\cdots a=1\end{cases}$
4	$\sum_{n=n_1}^{\infty}a^{n}=\frac{a^{n_1}}{1-a}\cdots \lvert a\rvert<1$
5	$\sum_{n=-\infty}^{n_2}a^{n}=\frac{a^{n_2}}{1-a^{-1}}\cdots \lvert a\rvert>1$
6	$\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m)=u(n)$
7	$\sum_{m=-\infty}^{n}u(m)=(n+1)u(n)$
8	$\sum_{m=-\infty}^{n}mu(m)=\frac{1}{2}n(n+1)u(n)$
9	$\sum_{m=-\infty}^{n}m^{2}u(m)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)u(n)$
10	$\sum_{n=0}^{\infty}na^{n}=\frac{a}{(1-a)^{2}}\cdots \lvert a\rvert<1$
11	$\sum_{n=0}^{\infty}n^{2}a^{n}=\frac{a^{2}+a}{(1-a)^{3}}\cdots \lvert a\rvert<1$

下面通过举例来说明解析法的计算过程。



【例 4.2】 已知两信号 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$，求 $y(n)=f_1(n)*f_2(n)$ 的值。

【解题思路与技巧】 本题求解要用卷积和的定义来求，卷积和的求解经常用到等比函数的求和公式，同时要注意求和公式的收敛条件。

(1) $f_1(n)=2^n u(-n-1)$ 　　 $f_2(n)=u(n+1)$

(2) $f_1(n)=u(n-1)$ 　　 $f_2(n)=3^n u(n)$

解：(1) 当 $n\geqslant -1$ 时，

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{-1}2^m=\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}=2^{-1}(1+2^{-1}+2^{-2}+\cdots)=2^{-1}\lim_{n\to\infty}\frac{1-2^{-n}}{1-2^{-1}}=1$$

当 $n<-1$ 时，

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n+1}2^m=\sum_{m=-(n+1)}^{\infty}2^{-m}=2^{n+1}(1+2^{-1}+2^{-2}+\cdots)=2^{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1-2^{-n}}{1-2^{-1}}=2^{n+2}$$

因此

$$y(n)=4\,(2)^n u(-n-2)+u(n+1)$$

(2) **方法 1**：

当 $n<1$ 时，$y(n)=0$

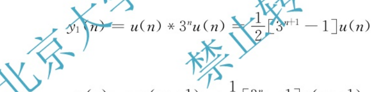
当 $n\geqslant 1$ 时，$y(n)=\sum_{m=0}^{n-1}3^m=(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})=\frac{1-3^n}{1-3}=-\frac{1}{2}(1-3^n)$

因此

$$y(n)=\frac{1}{2}[3^n-1]u(n-1)$$

方法 2：

$$y_1(n)=u(n)*3^n u(n)=\frac{1}{2}[3^{n+1}-1]u(n)$$



因此

$$y(n)=y_1(n-1)=\frac{1}{2}[3^n-1]u(n-1)$$

2. 用卷积和性质求卷积和

【例 4.3】 已知 $f_1(n)=a^n u(n)(0<\alpha<1)$，$f_2(n)=u(n)-u(n-N)$ 　$(N>0)$。求 $f(n)=f_1(n)*f_2(n)$。

【解题思路与技巧】 利用卷积性质求解卷积，要注意观察待卷积信号的特点，本题由于 $f_2(n)$ 中有 $u(n-N)$ 项，显然用位移性质。

解：由表 4-1

$$a^n u(n)*u(n)=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$$

由位移性质，可得

$$a^n u(n)*u(n-N)=\frac{1-a^{n-N+1}}{1-a}u(n-N)$$

故



$$f(n)=f_1(n)*f_2(n)=a^nu(n)*[u(n)-u(n-N))$$
$$=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)-\frac{1-a^{n-N+1}}{1-a}u(n-N)$$

$f(n)$ 波形如图 4.5 所示。

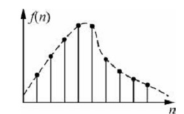


图 4.5　$f(n)$卷积波形图

【例 4.4】 已知 $f_1(n)=f_2(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n\leqslant 4\\0 & 其他\end{cases}$

求 $f(n)=f_1(n)*f_2(n)$。

【解题思路与技巧】 本题除了利用卷积的位移性质外，还要用到公式

$$y(n)=u(n)*u(n)=(n+1)u(n)$$

解：

$$f_1(n)=f_2(n)=u(n)-u(n-5)$$

$$f(n)=f_1(n)*f_2(n)=[u(n)-u(n-5)]*[u(n)-u(n-5)]$$
$$=u(n)*u(n)-u(n)*u(n-5)-u(n)*u(n-5)+u(n-5)*u(n-5)$$
$$=u(n)*u(n)-2u(n)*u(n-5)+u(n-5)*u(n-5)$$

由序列卷积位移性质

$$f(n)=y(n)-2y(n-5)+y(n-10)$$

其中

$$y(n)=u(n)*u(n)=(n+1)u(n)$$

故

$$f(n)=(n+1)u(n)-2(n-4)u(n-5)+(n-9)u(n-10)$$

$f(n)$ 波形如图 4.6 所示。

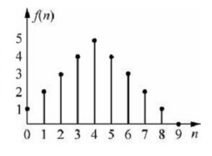


图 4.6　$f(n)$波形图

3. 卷积和的列表解法

卷积和的运算为两个序列相乘后的数值求和。对于两个有限长序列的卷积和运算，可以将两个离散时间序列的整数改写成下标。

$$y_h(n)=h(n)*f(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(n)h_{k-n}(n)$$

将两个序列按下标列成表 4－3。

表 4－3　卷积和列表解法

	$f[n_f]$	$f[n_f+1]$	$f[n_f+2]$	$f[n_f+3]$
$h[n_h]$	$h[n_h]f[n_f]$	$h[n_h]f[n_f+1]$	$h[n_h]f[n_f+2]$	$h(n_h]f[n_f+3]$
$h[n_h+1]$	$h[n_h+1]f[n_f]$	$h[n_h+1]f[n+1]$	$h[n_h+1]f[n_f+2]$	$h[n_h+1]f[n_f+3]$
$h[n_h+2]$	$h[n_h+2]f[n_f]$	$h[n_h+2]f[n+1]$	$h[n_h+2]f[n_f+2]$	$h[n_h+2]f[n_f+3]$
$h[n_h+3]$	$h[n_h+3]f[n_f]$	$h[n_h+3]f[n+1]$	$h[n_h+3]f[n_f+2]$	$h[n_h+3]f[n_f+3]$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



将表中乘积值(对角线数值)从左下到右上方向相加即是卷积和 $y(n)$。

【例 4.5】 设 $f_1(n)=u(n)-u(n-4)$，$f_2(n)=u(n)-u(n-3)$，利用图表法计算 $y(n)=f_1(n)*f_2(n)$ 的值。

【解题思路与技巧】 直接将数值填入表格即可。

解： 将 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 填入表格

		$f_1(0)$	$f_1(0)$	$f_1(0)$	$f_1(0)$
		1	1	1	1
$f_2(0)$	1	1	1	1	1
$f_2(0)$	1	1	1	1	1
$f_2(0)$	1	1	1	1	1

由表可得 $f(n)=f_1(n)*f_2(n)=\{1,2,3,3,2,1\}$　$n=0,1,2,3,4,5$

【例 4.6】 求下列两个序列的卷积和

$$f(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad h(n)=\begin{cases}2^n & 0\leqslant n\leqslant 6\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

【解题思路与技巧】 方法同例 4.5。

解： $f(n)$ 和 $h(n)$ 的序列值列表分别为

$f(n)=[1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \cdots]$　　$h(n)=[1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots]$

将 $f(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积和列表如下。

		f [0]	f [1]	f [2]	f [3]	f [4]	f [5]	f [6]	
		1	1	1	1	1	0	0	
h [0]	1	1	1	1	1	1	0	0	
h [1]	2	2	2	2	2	2	0	0	
h [2]	4	4	4	4	4	4	0	0	
h [3]	8	8	8	8	8	8	0	0	
h [4]	16	16	16	16	16	16	0	0	
h [5]	32	32	32	32	32	32	0	0	
h [6]	64	64	64	64	64	64	0	0	

卷积值列表如下：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$y(n)$	1	3	7	15	31	62	124	120	112	96	64	0	0	

故　　$y(n)=[1,3,7,15,31,62,124,120,112,96,64,0,0,\cdots]$

4. 竖式乘法

根据列表法求卷积和原理，当参与卷积和运算的二个离散序列为有限长序列时，可以采用竖式乘法来计算卷积和。下面介绍竖式乘法计算序列的卷积和。

当 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 为有限项时，可用下式来表示 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$。

$$\{f_1(n)\}=\{1\quad 1\}n=0,1 \quad 或 \quad \{f_1(n)\}=\{1\quad 1\}_0$$

$$\{f_2(n)\}=\{1\quad 0\quad -1\}n=0,1,2 \quad 或 \quad \{f_2(n)\}=\{1\quad 0\quad -1\}_0$$

注意：括号下的 0 表示离散信号从 $n=0$ 开始有数值，最前数字对应 $\delta(n)$ 系数，往右 n 依次增大。

用竖式乘法来计算卷积和，先列出竖式，跟列乘法时的一样尾部对齐，分别用下一行数值乘上一行数值，注意不能进位。再将同一列乘数进行相加，同样也不能进位。

根据卷积和的位移性知

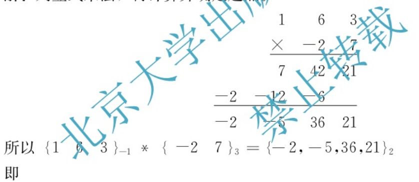
$$\{\cdots\}_a * \{\cdots\}_b = \{\cdots\}_{a+b}$$

因此，相乘后的序列的最低位为两个序列的最低位之和。

【例 4.7】 计算 $\{1\quad 6\quad 3\}_{-1} * \{-2\quad 7\}_4$

【解题思路与技巧】 利用竖式乘法求卷积时，注意不能进位。

解：列竖式乘法，再计算并确定起点。



$$\begin{array}{rrrr} & 1 & 6 & 3 \\ \times & & -2 & 7 \\ \hline & 7 & 42 & 21 \\ -2 & -12 & -6 & \\ \hline -2 & -5 & 36 & 21 \end{array}$$

所以 $\{1\quad 6\quad 3\}_{-1} * \{-2\quad 7\}_3=\{-2,-5,36,21\}_2$

即

$$f(n)=-2\delta(n-2)-5\delta(n-3)+36\delta(n-4)+21\delta(n-5)$$

【小思考】 归纳离散时间系统卷积和与连续时间系统卷积积分在计算上有何类似?

4.3 离散时间系统响应

与连续时间系统类似，离散时间单输入单输出系统如图 4.7 所示。

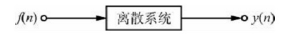


图 4.7 单输入单输出离散时间系统

一个离散时间信号 $f(n)$ 加到一个离散时间系统中所产生的输出也是一个离散时间信号 $y(n)$，可表示为



$$y(n)=T[f(n)]$$

其差分方程为

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{\mathrm{j}=0}^{M}b_{\mathrm{j}}f(n-\mathrm{j}) \tag{4-12}$$

对一个 n 阶的 LTI 离散时间系统，考虑到系统的初始条件的情况下，可以用 n 阶差分方程来表示

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{j=0}^{M}b_j f(n-\mathrm{j})\\ y(k)=c_k \quad k=0,1,2,\cdots,N-1\end{cases} \tag{4-13}$$

其中 $y(k)=c_k$ 为附加条件或初始值，该方程的解称为离散时间系统的全响应 $y(n)$。

将

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=0\\ y(k)=c_k \quad k=0,1,2,\cdots,N-1\end{cases} \tag{4-14}$$

方程的解称为离散时间系统的零输入响应 $y_{zi}(n)$。

将

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{j=0}^{M}b_j f(n-\mathrm{j})\\ y(k)=0 \quad k=0,1,2,\cdots,N-1\end{cases} \tag{4-15}$$

方程的解称为系统的零状态响应 $y_{zs}(n)$。

离散时间系统方程的解 $y(n)$ 满足

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n) \tag{4-16}$$

4.3.1 离散时间系统的算子方程

离散时间系统差分方程的求解可以采用经典解法和递推算法等，这些都在前面的相关课程中学过，下面介绍将差分方程转换为算子方程然后再求解方程的方法。

与连续时间系统分析类似，离散时间系统的也可以通过定义算子将差分方程转换为算子方程。

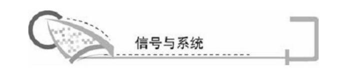
离散时间算子分为超前算子和迟后算子两种。

超前算子 E 定义为

$$y(n+1)=Ey(n) \tag{4-17}$$

迟后算子 $\frac{1}{E}$ 定义为

$$y(n-1)=\frac{1}{E}y(n) \tag{4-18}$$



式(4-17)和式(4-18)的框图可表示为图4.8(a)和图4.8(b)。

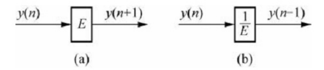


图4.8　离散算子框图

$y(n+1)$ 和 $y(n-1)$ 信号是 $y(n)$ 经位移后产生的，所以超前算子 E 事实上是预测器，迟后算子 $\frac{1}{E}$ 是单位延时器。

将算子代入式(4-13)的差分方程中即得到算子方程。

$$\begin{aligned} &a_0 y(n) + a_1 E^{-1} y(n) + \cdots + a_{N-1} E^{-(N-1)} y(n) + a_N E^{-N} y(n) \\ &= b_0 f(n) + b_1 E^{-1} f(n) + \cdots + b_{M-1} E^{-(M-1)} f(n) + b_M E^{-M} f(n) \end{aligned} \tag{4-19}$$

上式可以简写为

$$A(E)y(n) = B(E)f(n) \tag{4-20}$$

传输算子 $H(E)$ 定义为

$$H(E) = \frac{y(n)}{f(n)} = \frac{B(E)}{A(E)} \tag{4-21}$$

通常情况下，$H(E)$ 中的 E 是按正幂次方出现的。

很明显正幂次方和负幂次方之间是很容易转换的。

如一个LTI系统的差分方程为

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = f(n) + 3f(n-1)$$

系统的传输算子

$$H(E) = \frac{1+3E^{-1}}{1+3E^{-1}+2E^{-2}} = \frac{E(E+3)}{E^2+3E+2}$$

4.3.2　离散时间系统的零输入响应

线性时不变系统零输入响应定义为：在 $n < n_0$ 时系统的输入为零，即 $f(n)=0$，由系统的起始状态所引起的响应称为 $n \geqslant n_0$ 时的零输入响应，用 $y_{zi}(n)$ 表示。

如 $f(n)$ 是因果信号，求解零输入响应的方程为

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}(n-k) = 0 \\ y(k) = c_k \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1 \end{cases} \tag{4-22}$$

【知识要点提醒】　求零输入响应，$y(k)=c_k$ 用起始条件或用初始条件均可以求得，为了初学者理解方便，这里统一推荐采用初始条件来求解零输入响应。

因此，上式可以改写为





$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}(n-k)=0\\ y(0),y(1),\cdots,y(N-1)\end{cases}$$

$y_{zi}(n)$ 的计算，按以下三步求解。

1. 求出特征根

$$令\ A(\lambda)=0,即\ a_0\lambda^N+a_1\lambda^{N-1}+\cdots+a_{N-1}\lambda+a_N=0 \tag{4-23}$$

式(4-23)为特征方程，求解特征方程可以得到 N 个特征根。

下面将特征根分为单根和重根二种情况讨论。

(1) 当 $\lambda=a$ 是单根时，由于 $n\geqslant 0$，特征根满足方程 $(\lambda-a)y_{zi}(n)=0$，有 $y_{zi}(n+1)-\alpha y_{zi}(n)=0$，解得 $y_{zi}(n)=C\alpha^n$。

因此

$$y_{zi}(n)=C\alpha^n u(n) \tag{4-24}$$

(2) 当 $\lambda=a$ 是 K 重根时，则

$$y_{zi}(n)=\alpha^n(C_1+C_2n+\cdots+C_kn^{k-1})u(n) \tag{4-25}$$

其中的 C 为待定系数，由初始条件确定。

2. 待定系数的确定

将 $y(0),y(1),\cdots,y(N-1)$ N 个初起条件代入零输入响应中，求得待定系数。当然，也可以用 $y(-1),y(-2),\cdots,y(-N)$ N 个初起条件代入零输入响应中，求得待定系数。

下面举例说明用不同初始条件的解题方法。

【例 4.8】 已知系统的差分方程为 $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=f(n)$，激励 $f(n)=u(n)$，求以下零输入响应 $y_{zi}(n)$。

(1) 系统起始状态为 $y(-1)=-4,y(-2)=3$。

(2) 系统初始状态为 $y(0)=1,y(1)=0$。

【解题思路与技巧】 本题重点要注意用 $y(0_+)$ 和 $y(0_-)$ 两种初始条件下求零输入响应时的解题区别。

解：(1) 当系统起始状态为 $y(-1)=-4,y(-2)=3$。

求解 $y_{zi}(n)$ 的方程为

$$y_{zi}(n)+3y_{zi}(n-1)+2y_{zi}(n-2)=0 \qquad n\geqslant 0$$

特征方程为

$$D(\lambda)=\lambda^2+3\lambda+2=0$$

求得特征根

$$\alpha_1=-1,\alpha_2=-2$$

$$y_{zi}(n)=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n \qquad n\geqslant 0$$

方法 1：由初始条件确定系数

由于系统起始状态为

$$y(-1)=-4 \quad y(-2)=3,$$

将起始条件代入零输入响应

$$\begin{cases}-4=y_{zi}(-1)=c_1(-1)^{-1}+c_2(-2)^{-1}\\3=y_{zi}(-2)=c_1(-1)^{-2}+c_2(-2)^{-2}\end{cases} \quad 得 \quad c_1=2,c_2=4。$$

因此

$$y_{zi}(n)=2(-1)^n+4(-2)^n \quad n\geqslant 0$$

方法 2：求初始状态 $y(0)$ 和 $y(1)$

由于求零输入响应，原方程可改为

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=0$$

将 $n=0$ 和 $n=1$ 代入方程，可得

$$\begin{cases}y(0)=-3y(-1)-2y(-2)=6\\y(1)=-3y(0)-2y(-1)=-10\end{cases}$$

代入零输入响应，可得 $\quad c_1=2,c_2=4$

因此

$$y_{zi}(n)=2(-1)^n+4(-2)^n \quad n\geqslant 0$$

(2) 当系统初始状态为 $y(0)=1,y(1)=0$。

方法 1：由于已经知道了系统的初始条件，$y(0)=1,y(1)=0$

由零输入响应

$$y_{zi}(n)=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n$$

直接代入初始条件

$$y_{zi}(0)=c_1+c_2=1 \qquad y_{zi}(1)=-c_1-2c_2=0$$

解得

$$c_1=2,c_2=-1$$

因此

$$y_{zi}(n)=2(-1)^n-(-2)^n \quad n\geqslant 0$$

方法 2：求出 $y(-1)$ 和 $y(-2)$，将 $y(0)$ 和 $y(1)$ 代入齐次方程，得

$$\begin{cases}y(0)+3y(-1)+2y(-2)=0\\y(1)+3y(0)+2y(-1)=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}1+3y(-1)+2y(-2)=0\\0+3y(0)+2y(-1)=0\end{cases}$$

得

$$y(-1)=-\frac{3}{2},\ y(-2)=\frac{7}{4}$$



将 $n=-1$ 和 -2 代入，有

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{2} = c_1(-1)^{-1} + c_2(-2)^{-1} \\ \dfrac{7}{2} = c_1(-1)^{-2} + c_2(-2)^{-2} \end{cases}$$

求得 $c_1 = 2, c_2 = -1$

所以零输入响应为

$$y_{zi}(n) = 2(-1)^n - (-2)^n \quad n \geqslant 0$$

【知识要点提醒】 由此例可见，求解离散时间零输入响应时，既可以用 $y(0_+)$ 求解，也可以用 $y(0_-)$ 求解，但必须要搞清楚两种初始条件求解的区别和 $y(0_+)$ 与 $y(0_-)$ 之间的关系。对于初学者来说，建议使用 $y(0_-)$ 求解，避免造成不必要的错误。

4.4 离散时间系统的单位脉冲响应

离散时间系统的单位脉冲响应为：在系统中加入输入脉冲序列 $f(n) = \delta(n)$，则系统的输出 $y(n) = h(n)$，则称 $h(n)$ 为离散时间系统的单位脉冲响应。

与连续时间系统相同，离散时间系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 的求法包括差分算子法、两个因果 LTI 系统级联法和差分方程两边函数项匹配法。下面主要介绍差分算子法。

离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应可以通过系统的传输算子 $H(E)$ 求出。

当 $H(E)$ 为单极点时，系统的传输算子可以表示为

$$H(E) = \frac{E}{E-\gamma} \tag{4-26}$$

相应的差分方程为

$$(E-\gamma)y_{zs}(n) = Ef(n)$$

若令 $f(n) = \delta(n)$ 时，则 $y_{zs}(n) = h(n)$，故有

$$(E-\gamma)h(n) = E\delta(n)$$

即

$$h(n+1) - \gamma h(n) = \delta(n+1)$$

因此，可以得到

$$h(n+1) = \gamma h(n) + \delta(n+1) \tag{4-27}$$

由于系统是因果系统，当 $n \leqslant -1$ 时，有 $h(n) = 0$，以此为初始条件，对式(4-27)进行递推运算，可得

当 $n=-1$ 时 $\quad h(0) = \gamma h(-1) + \delta(0) = 1$

当 $n=0$ 时 $\quad h(1) = \gamma h(0) + \delta(1) = \gamma$

当 $n=1$ 时 $\quad h(2) = \gamma h(1) + \delta(2) = \gamma^2$

$$\vdots$$

当 $n=n-1$ 时　　　$h(n)=\gamma h(n-1)+\delta(n)=\gamma^n$

故有

$$H(E)=\frac{E}{E-\gamma}\longrightarrow h(n)=\gamma^n u(n) \tag{4-28}$$

为了应用方便，下面将常用的差分算子公式列表 4 - 4 中以便参考。

表 4 - 4　常用差分算子公式

序号	$H(E)$	$h(n)\quad n\geqslant 0$
1	1	$\delta(n)$
2	$\dfrac{E}{E-\gamma}$	γ^n
3	$\dfrac{E}{(E-\gamma)^2}$	$n\gamma^{n-1}$
4	$\dfrac{E}{(\mathrm{E}-\gamma)^m}$	$\dfrac{1}{(m-1)!}n(n-1)\cdots(n-k+2)\gamma^{n-k+1}$
5	$\dfrac{1}{E-\gamma}$	$\gamma^{n-1}u(n-1)$
6	$\dfrac{E^2}{(E-\gamma)^2}$	$(n+1)\gamma^n$

下面介绍一下由系统传输算子 $H(E)$ 计算单位脉冲响应 $h(n)$ 的一般方法。

设 LTI 离散时间系统的传输算子为

$$H(E)=\frac{b_m+b_{m-1}E^{-1}+\cdots+b_0E^{-m}}{1+a_{n-1}\mathrm{e}^{n-1}+\cdots+a_0} \tag{4-29}$$

【知识要点提醒】 求解单位脉冲响应 $h(n)$ 的步骤如下。

(1) 将 $H(E)$ 除以 E 得到 $\dfrac{H(E)}{E}$；

(2) 将 $\dfrac{H(E)}{E}$ 展开成部分分式和的形式；

(3) 将部分分式展开式两边乘以 E，得到 $H(E)$ 的部分分式展开式

$$H(E)=\sum_{i=1}^{m}H_i(E)=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_iE}{(E-p_i)^{d_i}} \tag{4-30}$$

式中，m 为 $\dfrac{H(E)}{E}$ 的相异极点数，p 为第 i 个极点，d_i 为该极点的阶数，k_i 为相应各部分分式项系数，各极点的阶数之和等于 n，即

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=n$$



(4) 由表 4－4 可以求得各 $H_i(E)$ 对应的单位脉冲响应分量 $h_i(n)$；

(5) 求出系统的单位脉冲响应

$$h(n)=\sum_{i=1}^{m}h_i(n) \tag{4-31}$$

【例 4.9】 已知描述某离散时间系统的差分方程为

$$y(n)+y(n-1)-6y(n-2)=f(n)$$

求系统的单位脉冲响应 $h(n)$。

【解题思路与技巧】 首先由差分方程写出算子方程，然后求出系统的传输算子 $H(E)$，最后再求出系统的单位脉冲响应 $h(n)$。

解： 系统的传输算子 $H(E)$ 为

$$H(E)=\frac{1}{1+E^{-1}-6E^{-2}}=\frac{E^2}{E^2+E-6}$$

将 $\dfrac{H(E)}{E}$ 进行部分分式展开，得

$$\frac{H(E)}{E}=\frac{E}{(E-2)(E+3)}=\frac{2}{5}\frac{1}{E-2}+\frac{3}{5}\frac{1}{E+3}$$

$$H(E)=\frac{2}{5}\frac{E}{E-2}+\frac{3}{5}\frac{E}{E+3}$$

由于

$$\frac{2}{5}\frac{E}{E-2}\rightarrow h_1(n)=\frac{2}{5}(2)^n u(n)$$

$$\frac{3}{5}\frac{E}{E+3}\rightarrow h_2(n)=\frac{3}{5}(-3)^n u(n)$$

所以，系统的单位脉冲响应为

$$h(n)=h_1(n)+h_2(n)=[\frac{2}{5}(2)^n+\frac{3}{5}(-3)^n]u(n)$$

4.5　离散时间系统的零状态响应

零状态响应的定义是系统的起始状态为零，由系统的外加激励信号所产生的响应，用 $y_{zs}(n)$ 表示。在因果信号 $f(n)$ 的作用下，求零状态响应的方程为

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{N}a_k y_{zs}(n-k)=\sum_{j=0}^{M}b_j(n-j)\\ y_{zs}(-1)=y_{zs}(-2)=\cdots=y_{zs}(-N)=0\end{cases} \tag{4-31}$$

习惯上，边界条件省略不写。下面介绍零状态响应的求解方法。

4.5.1 离散时间系统的零状态响应

由离散时间信号的时域分解可知，任一输入序列 $f(n)$ 分解为一系列移位脉冲序列的线性组合，即

$$f(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)\delta(n-m) \tag{4-32}$$

根据离散时间 LTI 系统的线性性质和移不变性，可以分别求出每个移位脉冲序列 $f(m)\delta(n-m)$ 作用于系统的零状态响应。然后将它们叠加起来就可以得到系统对输入 $f(n)$ 的零状态响应 $y_{zs}(n)$。

由 LTI 离散时间系统，脉冲序列的输入输出关系为

$$\delta(n)\xrightarrow{\text{响应}}h(n)\quad\text{（单位脉冲响应）}$$

$$\delta(n-m)\xrightarrow{\text{响应}}h(n-m)\quad\text{（系统移不变性质）}$$

$$f(m)\delta(n-m)\xrightarrow{\text{响应}}f(m)h(n-m)\quad\text{（系统的齐次性）}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)\delta(n-m)\xrightarrow{\text{响应}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)h(n-m)\quad\text{（系统的叠加性）}$$

由信号的分解公式及卷积和运算的定义

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)h(n-m)=f(n)*h(n)$$

可得

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)h(n-m)=f(n)*h(n) \tag{4-33}$$

该式为系统的零状态响应 $y_{zs}(n)$，写成

$$y_{zs}(n)=f(n)*h(n)$$

上式表明，LTI 离散时间系统的零状态响应等于输入信号序列 $f(n)$ 与系统单位脉冲响应 $h(n)$ 的卷积和。

【例 4.10】 系统框图如图 4.9 所示，已知

$$x(n)=u(n),\ h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-3),\ h_2(n)=0.8^n u(n)$$

求系统输出零状态响应 $y_{zs}(n)$。

$f(n)\rightarrow$ [$h_1(n)$] $\rightarrow$ [$h_2(n)$] $\rightarrow y(n)$

图 4.9 系统框图

【解题思路与技巧】 由于子系统 $h_1(t)$ 和子系统 $h_2(t)$ 级联，故总系统 $h(t)=h_1(t)*h_2(t)$，在计算卷积时，注意卷积的顺序和方法。

解：方法 1：

$$y_{zs}(n)=x(n)*h_1(n)*h_2(n)=u(n)*[\delta(n)-\delta(n-3)]*0.8^n u(n)$$



$$=[u(n)-u(n-3)]*0.8^n u(n)$$
$$=\frac{1-0.8^{n+1}}{1-0.8}u(n)-\frac{1-0.8^{n-2}}{1-0.8}u(n-3)$$
$$=5[(1-0.8^{n+1})u(n)-(1-0.8^{n-2})u(n-3)]$$

方法 2：

$$y_{zs}(n)=x(n)*h_1(n)*h_2(n)=u(n)*[\delta(n)-\delta(n-3)]*0.8^n u(n)$$
$$=[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)]*0.8^n u(n)$$
$$=0.8^n u(n)+0.8^{n-1}u(n-1)+0.8^{n-2}u(n-2)$$

方法 3：

$$y_{zs}(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]=u(n)*[0.8^n\delta(n)-0.8^{n-3}\delta(n-3)]$$
$$=\frac{1-0.8^{n+1}}{1-0.8}u(n)-\frac{1-0.8^{n-2}}{1-0.8}u(n-3)$$
$$=5[(1-0.8^{n+1})u(n)-(1-0.8^{n-2})u(n-3)]$$

【例 4.11】 若离散时间系统的差分方程为

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=f(n)+f(n-1),$$

输入信号为 $f(n)=2^n u(n)$

求系统的零状态响应 $y_{zs}(n)$。

【解题思路与技巧】 首先通过差分方程求出系统的算子方程，然后写出系统的 $H(E)$，由此可以得到 $h(n)$，最后用 $y(n)=f(n)*h(n)$ 求出系统的零状态响应。

解： 1）求 $h(n)$

$$H(E)=\frac{E(E+1)}{E^2-3E+2}=(-\frac{2E}{E-1}+\frac{3E}{E-2})$$

所以

$$h(n)=[-2+3(2)^n]u(n)$$

2）求 $y_{zs}(n)$

$$y(n)=h(n)*f(n)=[-2+3(2)^n]u(n)*2^n u(n)$$
$$=-2u(n)*2^n u(n)+3(2)^n u(n)*2^n u(n) \qquad \text{（查表 4-1）}$$
$$=-2\frac{1-2^{n-1}}{1-2}u(n)+3(n+1)2^n u(n)$$
$$=[2+(3n-1)2^n]u(n)$$

4.5.2 离散时间系统的完全响应

完全响应的方程为

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{j=0}^{M}b_j f(n-\mathrm{j})\\ y(k)=c_k \quad k=0,1,2,\cdots,N-1\end{cases} \tag{4-34}$$

零输入响应方程为

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0 \\ y(k) = c_k \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1\end{cases} \tag{4-35}$$

求零状态响应方程为

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{j=0}^{M} b_j f(n-\mathrm{j}) \\ y(k) = 0 \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1\end{cases} \tag{4-36}$$

离散时间系统完全响应为零输入响应 $y_{zi}(n)$ 和零状态响应 $y_{zi}(n)$ 之和。即

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \tag{4-37}$$

本章知识要点

1. 卷积和

1）卷积和的定义

$$y(n) = f(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) h(n-k)$$

2）卷积和的性质。

2. 卷积和的计算方法

1）用解析法求卷积和

利用定义计算卷积和。

2）用卷积和性质求卷积和

与表 4 - 1 配合计算卷积和。

3）列表解法计算卷积和

4）竖式乘法计算卷积和

3. 离散时间系统的算子方程

超前算子 E 定义为 $\qquad y(n+1) = Ey(n)$

迟后算子 $\frac{1}{E}$ 定义为 $\qquad y(n-1) = \frac{1}{E} y(n)$



4. 离散时间系统的零输入响应

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}(n-k) = 0 \\ y(k) = c_k \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

5. 离散时间系统的单位脉冲响应

差分算子求解单位脉冲响应。

6. 离散时间系统的零状态响应

$$y_{zs}(n) = f(n) * h(n)$$

7. 离散时间系统的完全响应

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$



习题 4

4.1　计算 $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) * [u(n) - u(n-2)]$，并画出卷积和的波形。

4.2　用卷积和定义计算下列各题。

(1) $2^n u(n) * 3^n u(n)$　　(2) $u(n) * nu(n)$　　(3) $2 * \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(4) $u(n) * 3^n u(-n)$

4.3　计算下列信号的卷积和。

(1) $y(n) = A * \left(\frac{1}{2}\right) u(n)$　　(2) $y(n) = 3^n u(n-1) * 2^n u(n+1)$

4.4　各序列的图形如图 4.10 所示，试求下列卷积和。

(1) $f_1(n) * f_2(n)$　　(2) $f_2(n) * f_3(n)$　　(3) $f_3(n) * f_4(n)$

(4) $[f_2(n) - f_1(n)] * f_3(n)$

4.5　用时移性质计算下列各卷积和。

(1) $nu(n) * [\delta(n+1) - \delta(n-2)]$　　(2) $nu(n) * 2^n u(n-1)$

(3) $nu(n) * (n-1)u(n-1)$　　(4) $3^{n-1} u(n-2) * 2^n u(n-1)$

4.6　求以下卷积和。

(1) $2^n u(-n-1) * \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$　　(2) $2^n u(-n) * 3^n u(-n)$

4.7　用竖式乘法求下列各卷积和。

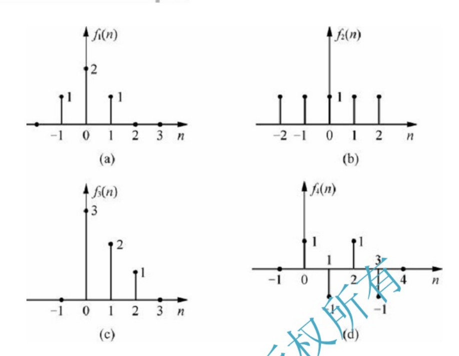


图 4.10　题 4.4 图

(1) $3^n[u(n)-u(n-3)]*[\delta(n)-2\delta(n-1)]$

(2) $[u(n)-u(n-4)]*[u(n+1)-u(n-2)]$

(3) $\{2,7,6\}_2 * \{2,3,4\}_{-3}$

(4) $\{2,7\}_{-1} * \{2,4,6\}_{-2}$

4.8　已知 $f_1(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$，$f_2(n)=\delta(n)-\frac{1}{4}\delta(n-1)$，$f_3(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n$

计算 (1) $y_1(n)=[f_1(n)*f_2(n)]*f_3(n)$　(2) $y_2(n)=[f_2(n)*f_3(n)]*f_1(n)$

(3) $y_3(n)=[f_1(n)*f_3(n)]*f_2(n)$

$y_1(n)$，$y_2(n)$ 和 $y_3(n)$ 相等吗？说明为什么。

4.9　图 4.11 所示的复合系统，各子系统的单位冲激响应为 $h_1(n)=u(n)$，$h_2(n)=u(n-5)$。求复合系统的单位冲激响应 $h(n)$。

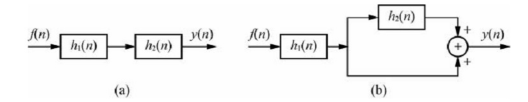


图 4.11　题 4.9 图

1.10　系统如图 4.12 所示，求单位脉冲响应 $h(n)$。

4.11　系统如图 4.13 所示，求单位脉冲响应 $h(n)$。

4.12　某二阶系统的差分方程为

$$y(n)-2\alpha y(n-1)+y(n-2)=f(n)$$

式中 α 为常数，试讨论当



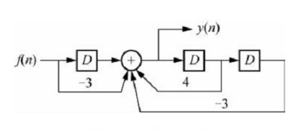


图 4.12　题 4.10 图

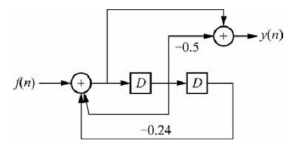


图 4.13　题 4.11 图

(1) $|\alpha|<1$　　(2) $|\alpha|=1$　　(3) $|\alpha|=-1$　　(4) $|\alpha|>1$

时的单位脉冲响应 $h(n)$。

4.13　图 4.11 所示系统，已知复合系统的 $h(n)$ 如图 4.14 所示。

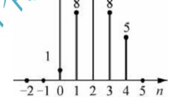


图 4.14　题 4.13 图

(1) 设 $h_2(n)=u(n)-u(n-2)$，求 $h_1(n)$。

(2) 求输入 $f(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$ 时的零状态响应 $y_{zs}(n)$。

4.14　已知 LTI 系统的输入 $f(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$，零状态响应 $y_{zs}(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$，求单位冲激响应 $h(n)$。

4.15　如图 4.15 所示系统，求当 $f(n)=u(n)$ 时，系统的零状态响应 $y_{zs}(n)$。

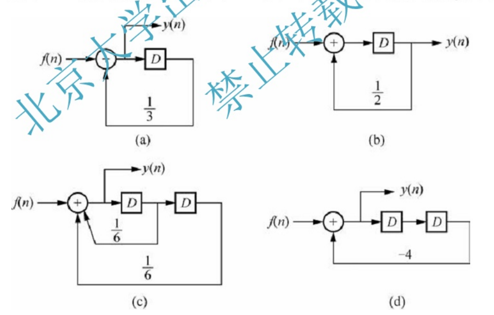


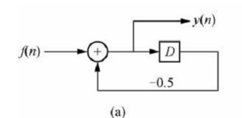
图 4.15　题 4.15 图

4.16　如图 4.16 所示系统，求输入 $f(n)$ 为下列信号时的零状态响应 $y_{zs}(n)$。

(1) $f(n)=u(n)$　　(2) $f(n)=ku(n)$　　(3) $f(n)=2^n u(n)$

4.17　系统的差分方程为 $y(n)+5y(n-1)+4y(n-2)=2^n u(n)$

求下列两种情况时的零输入响应，零状态响应和完全响应。



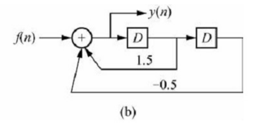


图 4.16　题 4.16 图

(1) $y(-1)=0, y(-2)=1$　　　(2) $y(0)=0, y(1)=1$

4.18　求差分方程 $y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=2^n u(n)$, $y(0)=0, y(1)=1$ 时的零输入响应，零状态响应和完全响应。

4.19　求下列系统的单位冲激响应 $h(n)$ 和单位阶跃响应 $g(n)$。

(1) $y(n)=f(n)-2f(n-1)$　　　(2) $y(n)+2y(n-1)=f(n)+f(n-1)$

(3) $y(n)-\frac{1}{2}y(n-2)=2f(n)-f(n-2)$

(4) $y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=f(n)-f(n-1)$

4.20　LTI 离散系统的输入输出关系为

(1) $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}2^{k-n}f(k+1)$　　　(2) $y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{k}f(n-k)$

求系统的单位冲激响应和单位阶跃响应。

4.21　离散系统如图 4.17 所示。

(1) 求单位冲激响应 $h(n)$。

(2) 若 $f(n)=2^n u(n)$, $y(n)=[2+4(2)^n+3(3)^n]u(n)$

求 $y(-1)$ 和 $y(-2)$ 的值，并求零输入响应和零状态响应。

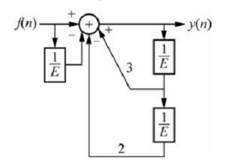


图 4.17　题 4.21 图

4.22　已知 LTI 系统的单位阶跃响应 $g(n)=[2^n+3(5)^n+10]u(n)$

(1) 求系统的差分方程。　　　(2) 求单位冲激响应 $h(n)$。

(3) 求 $f(n)=u(n)+3^n u(n)$ 时的零状态响应。

4.23　已知系统方程为 $y(n)-y(n-1)=f(n)$

求下列情况时的响应。

(1) $f(n)=2, y(0)=1$　　　(2) $f(n)=n, y(-1)=1$



(3) $f(n)=n^2, y(0)=1$

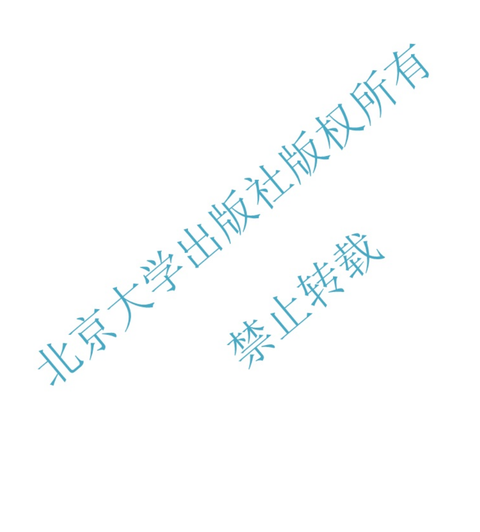
4.24 求下列差分方程的响应 $y(n)$。

(1) $y(n)+2y(n-1)=3, y(-1)=2$

(2) $y(n)+4y(n-1)+3y(n-2)=2^n, y(-1)=\frac{1}{15}, y(0)=\frac{4}{15}$

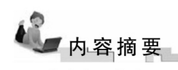
(3) $y(n)-6y(n-1)+9y(n-2)=2n+2, y(1)=6, y(2)=24.5$

(4) $y(n)+2y(n-1)+2y(n-2)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right), y(0)=0, y(1)=1$



第5章

连续时间信号的频谱



内容摘要

本章介绍连续时间周期信号的傅里叶级数、周期信号的频谱，非周期信号的傅里叶变换、典型信号的频谱函数、傅里叶变换的性质。

教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识	工程应用方向
周期信号傅里叶级数	了解三角形式 了解指数形式	积分变换	信号频域分解
信号的频谱	熟悉信号频谱概念	信号的幅频特性和相频特性	周期信号的频谱
非周期信号频谱	熟悉定义 掌握常见信号 掌握性质 熟悉周期信号频谱	傅里叶变换	非周期信号的频谱分析



教学目标与要求

了解周期信号傅里叶级数。

掌握周期信号频谱的特点。

掌握非周期信号傅里叶变换。

掌握非周期信号傅里叶变换的性质。

掌握周期信号的性质。



对信号的分析，除了可以用时域分析法外，还经常利用频域分析法，因此需要引入一个非常重要的数学工具——傅里叶变换。通过信号的傅里叶变换，可以有效地分析信号的频域特性。为了分析非周期信号的频谱，引入了频谱密度函数的概念。研究连续时间信号的频谱密度有两个方面的意义。

(1) 通过频谱密度函数可以方便地分析连续时间信号的幅频特性和相频特性——即频率特性。

(2) 系统频谱密度函数是系统函数，通过系统函数可以求解连续时间系统的频域响应。

5.1　周期信号的傅里叶级数

5.1.1　三角形式的傅里叶级数

如果一个信号 $f(t)$ 是周期的，那么对一切时间 t，存在某个正值 T，可以表示式为

$$f(t)=f(t+T) \tag{5-1}$$

式中，T 为 $f(t)$ 的基波周期，其基波频率为 $f_0=1/T$。若周期信号 $f(t)$ 满足狄里赫利条件，即

(1) 在任何周期内，$f(t)$ 必须绝对可积，即

$$\int_{t_0}^{t_0+T}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$$

(2) 在任何有限区间内，$f(t)$ 具有有限个起伏变化，也就是说，在任何一个周期内，$f(t)$ 极大值和极小值的数目是有限的。

(3) 在 $f(t)$ 的任何有限区间内，只有有限个不连续点，而且在这些不连续点上函数是有限值。则周期信号 $f(t)$ 可以展开为三角形式的傅里叶级数

$$\begin{aligned}f(t)=&a_0+a_1\cos(\omega_0 t)+b_1\sin(\omega_0 t)+a_2\cos(2\omega_0 t)+b_2\sin(2\omega_0 t)\\&+\cdots+a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\end{aligned}$$

可以写成

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)] \tag{5-2}$$

式中

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\mathrm{d}t \tag{5-3}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t \tag{5-4}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t \tag{5-5}$$

式中，$\omega_0=2\pi/T$ 是基波角频率，一般取 $t_0=-T/2$。

根据三角函数的知识，可以将三角形式的傅里叶级数中同频率项进行合并，写成另一种三角形式表达式

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n) \tag{5-6}$$

这种三角形式的傅里叶级数可以用来分析周期信号的单边频谱。

比较式(5-5)和式(5-6)，可以得出两种傅里叶级数中的系数之间有如下关系

$$A_0=a_0 \qquad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \qquad \varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n} \tag{5-7}$$

【小思考】 在实际信号中，哪些信号可以展开成傅里叶级数?

【例 5.1】 试将图 5.1 所示的周期矩形信号 $f(t)$ 展开为三角形式的傅里叶级数。

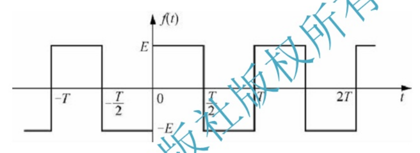


图 5.1 周期矩形信号的波形

【解题思路与技巧】 利用傅里叶级数的定义，分别求出 a_0，a_n，b_n，代入傅里叶级数表达式即可。

解：将信号 $f(t)$ 展开成傅里叶级数，首先分别计算 a_0, a_n, b_n：

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-E)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}E\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{T}\frac{E}{n\omega_0}(-\sin n\omega_0 t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{2}{T}\frac{E}{n\omega_0}(\sin n\omega_0 t)\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}\end{aligned}$$

由于

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

可得

$$a_n=0$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-E)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}E\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{T}\frac{E}{n\omega_0}(\cos n\omega_0 t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{2}{T}\frac{E}{n\omega_0}(-\cos n\omega_0 t)\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}\end{aligned}$$



$$= \frac{2E}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n=2,4,6,\cdots \\ \frac{4E}{n\pi} & n=1,3,5,\cdots \end{cases}$$

将系数代入式(5-2)，信号 $f(t)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\left[\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \cdots + \frac{1}{n}\sin n\omega_0 t\right] \quad n=1,3,5,\cdots$$

可见，该信号只含有 1，3，5，…，n 奇次谐波分量。

5.1.2　指数形式的傅里叶级数

为了分析信号的频谱和计算方便，经常采用另一种形式的傅里叶级数——指数形式的傅里叶级数。

根据欧拉公式

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \tag{5-8}$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \tag{5-9}$$

将三角形式的傅里叶级数表示为复指数形式的傅里叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2}e^{-jn\omega_0 t}\right) \tag{5-10}$$

令

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{5-11}$$

考虑到 a_n 是 n 的偶函数，b_n 是 n 的奇函数，由式(5-11)可得

$$F(-n\omega_0) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

将上述结果代入(5－10)，得到

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[F(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t} + F(-n\omega_0)e^{-jn\omega_0 t}]$$

令 $F(0) = a_0$，考虑到

$$\sum_{n=1}^{\infty}F(-n\omega_0)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-1}^{-\infty}F(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

令

$$F(n\omega_0) = F_n$$

得到 $f(t)$ 的指数形式傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t} \tag{5-12}$$

指数形式的傅里叶级数的系数 $F(n\omega_0)$（或简写作 F_n），它等于

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \tag{5-13}$$

由于复指数引入了 $-n$ 使得频谱有了负频率，实际上负频率是不存在的，这只是将第 n 项谐波分量的三角形式写成两个复指数形式后出现的一种数学频率。

5.2　周期信号的频谱

5.2.1　信号频谱的基本概念

何谓信号的频谱？信号的频谱就是信号的频率与信号在该频率点上的幅度值之间的关系，由周期信号的指数形式的傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

可见，周期信号 $f(t)$ 可分解为各次谐波频率分量的叠加，其中傅里叶级数系数 $|F_n|$ 反映了不同谐波分量的幅度，对应频率为 $n\omega_0$（或 ω）。因此，各次谐波的振幅与频率的关系称为振幅频谱；φ_n 反映了不同谐波分量的相位，称为以频率 $n\omega_0$（或 ω）为自变量的相位频谱。振幅频谱和相位频谱合称为信号频谱，将它们沿频率 $n\omega_0$ 轴分布的图形画出来，就称为周期信号的频谱图。频谱图清晰地表征了周期信号的频域特性，它反映了该信号所携带的全部信息。

下面举例说明。

【例 5.2】 已知周期信号 $f(t)$ 可以分解为

$$f(t) = 3 + 4\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{12}\right) + 2\cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(4\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) + 0.5\cos\left(6\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)$$

画出 $f(t)$ 的频谱图(幅度谱和相位谱)。

【解题思路与技巧】 画信号的频谱图主要是要找出每一个频率点 ω_0 所对应的信号的幅度和相位，并将其分别在幅度-频率和相位-频率图上画出，需要注意的是对应的最大值要用一条垂线画出，称为谱线。

解： 根据

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

当 $\omega = 0$ 时，幅度 $\dfrac{A_0}{2} = 3$，相位为 0；

当 $\omega = \omega_0$ 时，幅度 $A_1 = 4$，相位为 $\dfrac{\pi}{12}$；

当 $\omega = 2\omega_0$ 时，幅度 $A_2 = 2$，相位为 $\dfrac{\pi}{6}$；

当 $\omega = 4\omega_0$ 时，幅度 $A_4 = 1$，相位为 $\frac{\pi}{4}$；

当 $\omega = 6\omega_0$ 时，幅度 $A_6 = 0.5$，相位为 $\frac{\pi}{3}$。

画出幅度频谱和相位频谱如图 5.2 所示。

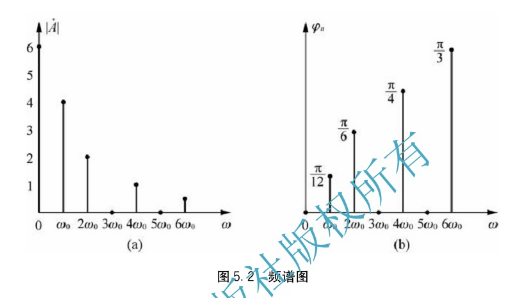


图 5.2　频谱图

从频谱图中可以看出，幅度频谱横坐标对应的是信号 $f(t)$ 的所含的正弦信号的谐波分量的频率，而纵坐标对应的是每一谐波分量所具有的幅值。相位频谱的纵坐标对应的是每一谐波分量所具有的相位。在画频谱图时要求纵坐标画成一条竖线，故形成频谱图。

【知识要点提醒】 连续时间周期信号的频谱图是根据信号的傅里叶级数画出的，周期信号的傅里叶级数有三角形式的傅里叶级数和指数形式的傅里叶级数两种。利用三角形式的傅里叶级数其系数 $|\dot{A}|$ 与频率 ω 之间的关系绘制的频谱图称为单边频谱，而利用指数形式的傅里叶级数系数 $|\dot{F}_n|$ 与频率 ω 之间的关系绘制的频谱图称为双边频谱。

信号可以是连续的，也可以是离散的，相应的信号频谱也有离散频谱和连续频谱之分。

5.2.2　周期矩形脉冲信号的频谱

周期矩形脉冲信号是一种典型的周期信号，分析周期矩形脉冲信号频谱的特点具有普遍的意义。为了更好地理解信号频谱，下面举例加以说明。

【例 5.3】 已知周期矩形信号 $f(t)$ 如图 5.3 所示，其中 E 为脉冲幅度，τ 为脉冲宽度，T 为脉冲重复周期，将其展开为指数形式的傅里叶级数。

【解题思路与技巧】 根据定义求出傅里叶级数，注意通过该题引出了“取样函数”的概念，这一概念对于以后学习信号与系统非常重要。

解： 信号在一周期内的表达式为

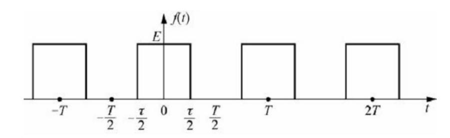


图 5.3　例 5.3 题图

$$\begin{cases} f(t) = E & |t| < \frac{\tau}{2} \\ f(t) = 0 & \frac{\tau}{2} < |t| < \frac{T_1}{2} \end{cases}$$

求傅里叶级数的复数振幅 F_n

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{E}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{E}{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}}{-\mathrm{j}n\omega_0}\bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{2E}{T}\frac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{2}}{n\omega_0} = \frac{E\tau}{T}\frac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{2}}{\frac{n\omega_0\tau}{2}}$$

可见傅里叶级数的系数 F_n 中含有 $\dfrac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{T}}{\frac{n\omega_0\tau}{T}}$ 项，为了表达和绘图方便，特引用“取样函数”的概念，“取样函数(sample)”定义为

$$S_a(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{5-14}$$

$S_a(x)$ 函数是一个偶函数，当 $x \to 0$ 时，$S_a(x) = 1$；当 $x = k\pi$ 时，$S_a(x) = 0$。其波形如图 5.4 所示。

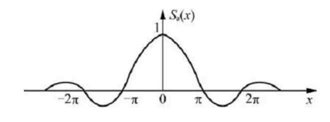


图 5.4　样本函数波形图

当引入“取样函数”后，F_n 可以写成

$$F_n = \frac{E\tau}{T}\frac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{T}}{\frac{n\omega_0\tau}{T}} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

$f(t)$ 的指数形式傅里叶级数展开式为



$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}=\frac{E\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

由于 F_n 是复函数可以写成

$$F_n=\frac{E\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)=|F_n|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n} \tag{5-15}$$

式中

$$|F_n|=\frac{E\tau}{T}\left|\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)\right|$$

使 $\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)=0$ 的 $\omega=n\omega_0$ 是 F_n 的零点，由此解出 F_n 的零点为

$$\omega=\frac{2m\pi}{\tau}\quad(m=\pm1,\pm2,\cdots) \tag{5-16}$$

由于 $\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$ 是实函数，通过零点后，$\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$ 有正、负变化，使得 F_n 也有正、负变化。当 $F_n>0$ 时，相位为0；当 $F_n<0$ 时，相位为 π（$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi}=-1$）。所以，周期矩形脉冲信号的双边幅度频谱和相位频谱为

$$|F_n|=\frac{E\tau}{T}\left|\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)\right| \tag{5-17}$$

$$\varphi_n=\begin{cases}0 & \dfrac{4n\pi}{\tau}<|\omega|<\dfrac{2(2n+1)\pi}{\tau}\\ \pi & \dfrac{2(2n+1)\pi}{\tau}<|\omega|<\dfrac{4(n+1)\pi}{\tau}\end{cases}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{5-18}$$

其单边频谱，由(5—17)可得

$$\left.\begin{aligned}c_0&=F_0=\frac{E\tau}{T}\\ c_n&=2|F_n|=\frac{2E\tau}{T}\left|\mathrm{Sa}\frac{n\omega_0\tau}{2}\right|。\end{aligned}\right\} \tag{5-19}$$

$T=5\tau$ 时，周期矩形脉冲信号的单边频谱与双边频谱如图 5.5 所示。

5.2.3　周期信号的频谱特点

通过对周期矩形信号的频谱分析，可以得出周期信号频谱的一般特性。

【知识要点提醒】

1）离散性

频谱图是离散的，频率间隔 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$。因此随着周期 T 的增加，离散谱线的间隔 ω_0 减小；频谱沿频率轴呈离散分布，谱线仅在 0、ω_0、$2\omega_0$、…基波的倍频频率点上出现。若 $T\to\infty$，$\omega_0\to0$，$|F_n|\to0$，离散谱将变为连续谱。

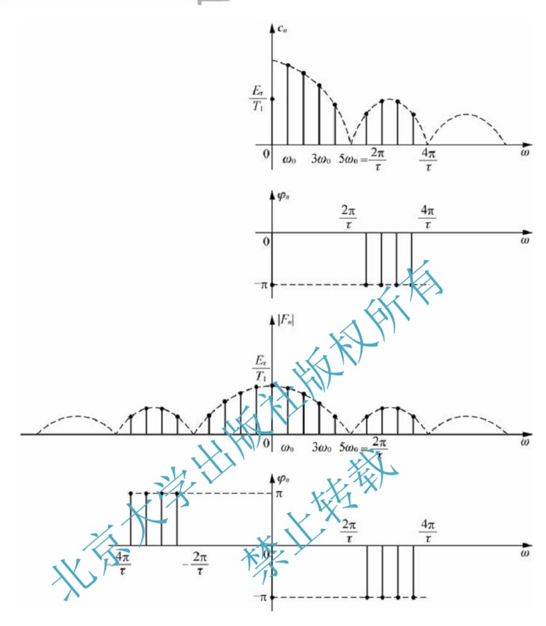


图 5.5　周期矩形脉冲信号的单边频谱与双边频谱

2）谐波性

各谱线呈等间距分布，相邻谱线间的距离正好等于基波频率，或者说，各次频谱正好为信号基波频率的整倍数。

3）收敛性

随着谐波次数的增加，谐波幅度值 $|F_n|$ 逐步下降，当 $n\to\infty$ 时，$|F_n|$ 或 c_n 趋于零。频谱图中有无穷多根谱线。

4）有效带宽

由频谱图可以看出，当频谱包络线为 $n\omega_0\tau/2=m\pi$ 时，即 $n\omega_0=\frac{2m\pi}{\tau}$（$m$ 取非零整数）时，其幅度值为零。其中第一个零点在 $\pm 2\pi/\tau$ 处，此后谐波的幅度逐渐减小。称 $0\sim\omega=\frac{2\pi}{\tau}$ 之间为有效带宽，在有效带宽内集中了信号的主要能量。



5.3　非周期信号的傅里叶变换

5.3.1　非周期信号的傅里叶变换

如果周期信号的重复周期足够长，使下一个周期信号到来前，前一个信号早已消失，这种信号常被作为非周期信号来处理。

对周期信号来讲，当其信号周期无穷长时，周期信号就变成非周期信号。因此可以从周期信号的频谱推出非周期信号的频谱。

从周期矩形脉冲信号频谱中可以看出，随着 T 的增大，离散谱线间隔 ω_0 就变窄，当 $T\to\infty$ 时，$\omega_0\to 0$，$|F_n|\to 0$，离散谱就变成了连续谱。虽然 $|F_n|\to 0$，但其频谱分布规律依然存在，它们之间的保持一定的比例关系。为了表示非周期信号振幅、相位随频率变化的相对关系，引入频谱密度函数。

周期信号的傅里叶级数为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \tag{5-20}$$

式中，系数

$$F_n=F(n\omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \tag{5-21}$$

非周期信号即为周期 $T\to\infty$ 的信号，此时频率 $\omega_0\to 0$，谱线间隔 $\Delta(n\omega_0)\to\mathrm{d}\omega$，而 $\frac{1}{T}=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$，离散频率 $n\omega_0$ 变成连续频率 ω。因此，系数 F_n 可写为

$$F_n=F(n\omega_0)=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{5-22}$$

式中，积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$ 仅是变量 ω 的函数，可定义为 $F(\mathrm{j}\omega)$，即

$$F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\omega_0\to 0}\frac{2\pi F(n\omega_0)}{\omega_0}=\lim_{T\to\infty}TF(n\omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{5-23}$$

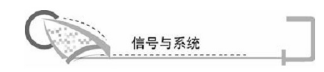
式中，$\frac{F(n\omega_0)}{\omega_0}$ 表示单位频带的频谱值，即频谱密度的概念。故 $F(\omega)$ 称为原函数 $f(t)$ 的频谱密度函数，或简称为频谱函数，由于 $F(\omega)$ 是复函数，可以写成

$$F(\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} \tag{5-24}$$

其中，$F(\mathrm{j}\omega)$ 的模用 $|F(\mathrm{j}\omega)|$，它代表信号中各频率分量的幅值大小。$\varphi(\omega)$ 是 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的相位函数，它表示信号中各频率分量之间的相位关系。对非周期信号而言，一般习惯上把 $|F(\mathrm{j}\omega)|\sim\omega$ 与 $\varphi(\omega)\sim\omega$ 曲线分别称为非周期信号的幅度频谱与相位频谱。

由上面的分析

$$F(\mathrm{j}\omega)=TF_n=\frac{2\pi}{\omega_0}F_n$$



可以得到

$$F_n = \frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \tag{5-25}$$

将式(5-25)代入式(5-20)中，将求和号改为积分号，则有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

因此可以得到傅里叶变换对

$$F(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{FT}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{5-26}$$

称为傅里叶正变换。

$$f(t) = \mathrm{FT}^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{5-27}$$

称为傅里叶逆变换。

傅里叶变换对可以简写为

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} F(\mathrm{j}\omega)$$

$F(\mathrm{j}\omega)$ 与 $f(t)$ 具有一一对应的关系，因此通过傅里叶变换可以完成非周期信号由时域到频域的相互转换。

【知识要点提醒】 函数 $f(t)$ 傅里叶变换存在的充分条件是无限区间内函数绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty \tag{5-28}$$

但它并不是必要条件。当引入广义函数的概念后，使一些不满足绝对可积条件的函数也能进行傅里叶变换。

【例 5.4】 求图 5.6 所示函数的傅里叶变换。

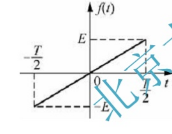


图 5.6　例 5.4 题波形图

【解题思路与技巧】 求解图形表示的信号，首先要准确地写出图形的函数表达式，然后代入傅里叶变换的定义求解。

解： 函数表达式为

$$f(t) = \frac{2E}{T}t\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$

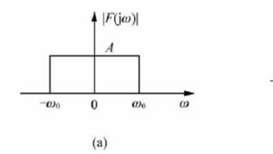
$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2E}{T}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{2E}{T}\left[-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{(-\mathrm{j}\omega)^2}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{2E}{T}\left[\frac{\frac{T}{2}}{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}} - \frac{\frac{T}{2}}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}}\right] - \frac{2E}{T}\,\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}}\right)$$

$$= \mathrm{j}\,\frac{2E}{\omega}\left[\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]$$

【例 5.5】 试求图 5.7 所示函数的傅里叶逆变换。

【解题思路与技巧】 该题中给出的是频谱函数的幅频特性和相频特性，因此，首先通过给出的幅频特性和相频特性写出频谱函数表达式，即 $F(\mathrm{j}\omega) = |F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$，然后再代



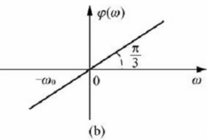


图 5.7　例 5.5 题图

入傅里叶逆变换的定义进行求解。

解： 由图可知

$$\varphi(\omega)=\omega_0\arctan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\omega_0$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\sqrt{3}}\quad |\omega|<\omega_0$$

$$f(\mathrm{t})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{t}}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{t}}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{\boldsymbol{A}}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t+\sqrt{3})\omega_0}\mathrm{d}\omega=\frac{A}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{j}(t-\sqrt{3})}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t+\sqrt{3})\omega_0}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(t+\sqrt{3})\omega_0}\right]$$

$$=\frac{A}{\pi}\frac{1}{(t+\sqrt{3})}\sin[(t+\sqrt{3})\omega_0]=\frac{A\omega_0}{\pi}\mathrm{Sa}(t+\sqrt{3})\omega_0$$

$$f(t)=\frac{A\omega_0}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_0(t+\sqrt{3})]$$

5.3.2　常用非周期信号的傅里叶变换

1. 冲激函数

波形如图 5.8 所示。

单位冲激函数 $\delta(t)$ 的傅里叶变换 $F(\mathrm{j}\omega)$ 是

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{FT}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=1 \tag{5-29}$$

说明单位冲激函数的频谱等于常数，也就是说，在整个频率范围内频谱是均匀分布的。因此这种频谱通常称为“均匀谱”或“白色谱”如图 5.9 所示。

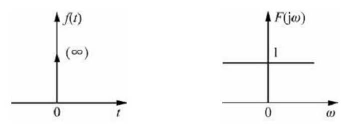
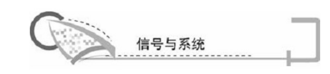


图 5.8　冲激函数波形图　　　　图 5.9　冲激函数频谱图



2. 矩形脉冲信号

已知矩形脉冲信号的表达式为

$$f(t)=\mathrm{E}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

其中 E 为脉冲幅度，τ 为脉冲宽度。波形如图 5.10(a)所示。

矩形脉冲信号的傅里叶变换为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{E}{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{E\tau}{\omega\,\frac{\tau}{2}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}}{2\mathrm{j}}$$

$$=E\tau\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}=E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

所以，矩形脉冲信号的频谱为

$$F(\mathrm{j}\omega)=E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \tag{5-29}$$

因此，矩形脉冲信号的幅度谱和相位谱分别为

$$|F(\mathrm{j}\omega)|=E\tau\left|\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}0 & \frac{4n\pi}{\tau}<|\omega|<\frac{2(2n+1)\pi}{\tau}\\ \pm\pi & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau}<|\omega|<\frac{2(2n+2)\pi}{\tau}\end{cases}\quad n=0,1,2,\cdots$$

因为 $F(\mathrm{j}\omega)$ 是实函数，通常用一条 $F(\mathrm{j}\omega)$ 曲线同时表示幅度谱 $F(\omega)$ 和相位谱 $\varphi(\omega)$，如图 5.10(b)所示。

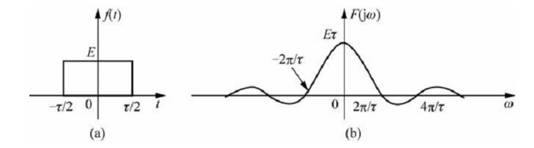


图 5.10 矩形脉冲信号的频谱

从以上分析可见，矩形脉冲信号在时域范围内是有限的，而它的频谱以 $\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 的规律变化，分布在无限宽的频率范围上，其信号能量主要集中于 $0\sim\frac{2\pi}{\tau}$ 范围。因此该频率范围即为信号的频带，即



$$B = \frac{2\pi}{\tau} \tag{5-30}$$

3. 直流信号

直流信号的表达式为

$$f(t) = 1 \qquad -\infty < t < \infty$$

波形如图 5.11 所示。

图 5.11 直流信号波形图

下面求出的 $f(t)$ 频谱。

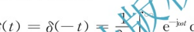
方法 1：由于

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} 1$$

由傅里叶反变换公式可知

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\,d\omega$$

由于 $\delta(t)$ 是 t 的偶函数，因此存在下面关系



$$\delta(t) = \delta(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\,d\omega$$

作变量代换 $\omega \Rightarrow t$，则上式可写为

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega}\,dt$$

故有

$$F(j\omega) = \text{FT}[1] = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t}\,dt = 2\pi\delta(\omega) \tag{5-31}$$

方法 2：由于直流信号不收敛，不满足狄里赫利条件，对 $f(t) = 1$ 两边同乘 $e^{-\alpha|t|}$，有

$$f(t)e^{-\alpha|t|} = 1 \cdot e^{-\alpha|t|}$$

求其傅里叶变换

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \lim_{\alpha\to 0}\text{FT}[f(t)e^{-\alpha|t|}] = \lim_{\alpha\to 0}\text{FT}[1 \cdot e^{-\alpha|t|}] \\
&= \lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-j\omega t}\,dt = \lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}e^{-j\omega t}\,dt + \lim_{\alpha\to 0}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}\,dt \\
&= \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega}\right] = \lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

当 $\omega \neq 0$ 时

$$F(j\omega) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = 0$$

当 $\omega = 0$ 时

$$F(j\omega) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{2}{\alpha} = \infty$$

故有

$$\mathrm{FT}[\mathrm{j}\omega]=\begin{cases}0 & \omega\neq 0\\ \infty & \omega=0\end{cases}\Rightarrow\delta(\omega)$$

其强度

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^{2}+\omega^{2}}\mathrm{d}\omega=2ar\tan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\bigg|_{-\infty}^{\infty}=2\pi$$

所以

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{FT}[1]=\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)\tag{5-32}$$

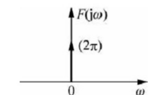


图 5.12　直流信号的频谱

因此直流信号 $f(t)=1,-\infty<t<\infty$ 及其频谱如图 5.12 所示。由图可知，直流信号的频谱只在 $\omega=0$ 处有一冲激。

【知识要点提醒】 当 $f(t)$ 不满足收敛时，即不满足狄里赫利条件，为了求傅里叶变换，经常采用乘一个收敛函数 $\mathrm{e}^{-\alpha|t|}$，使得 $f(t)\mathrm{e}^{-\alpha|t|}$ 满足收敛条件，通过求 $f(t)\mathrm{e}^{-\alpha|t|}$ 的傅里叶变换然后取极限，即让 $\alpha\to 0$，求得被测信号 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\mathrm{j}\omega)$。

4. 单边指数信号

单边指数信号的表示式为

$$f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t),\alpha>0$$

波形如图 5.13 所示。

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}\tag{5-33}$$

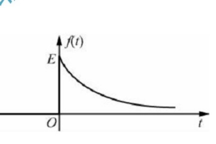


图 5.13　单边指数信号波形图

幅度频谱为

$$|F(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^{2}+\omega^{2}}}$$

相位频谱为

$$\varphi(\omega)=-\arctan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

单边指数信号的波形、幅度频谱和相位频谱如图 5.14(a)和图 5.14(b)所示。

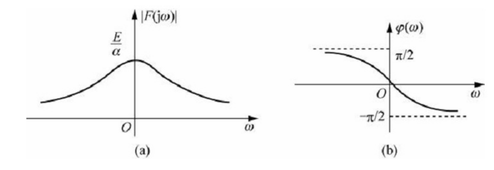


图 5.14　单边指数信号的频谱



5. 符号函数

符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$ 又称为赛格那(signum)函数，其定义为

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 0 & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

符号函数的波形图如图 5.15 所示。

图 5.15　符号函数的波形图

符号函数不满足狄里赫利条件，采取两边同乘衰减函数 $e^{-\alpha|t|}$，即

$$\mathrm{sgn}(t)=\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{sgn}(t)e^{-\alpha|t|}$$

先求乘积信号 $f_1(t)=\mathrm{sgn}(t)e^{-\alpha|t|}$ 的频谱 $F_1(\mathrm{j}\omega)$，因为

$$F_1(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(t)e^{-|\alpha|t}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{0}-e^{\alpha t}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{-1}{\alpha-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}=\frac{-\mathrm{j}2\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

所以，符号函数的频谱为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\alpha\to 0}F_1(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\mathrm{j}2\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{2}{\mathrm{j}\omega} \tag{5-34}$$

幅度频谱

$$|F(\mathrm{j}\omega)|=\frac{2}{|\omega|}=\frac{2\mathrm{sgn}(\omega)}{\omega}$$

相位频谱

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\pi/2 & \omega<0\\ -\pi/2 & \omega>0\end{cases}=-\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\omega)$$

符号函数的幅度频谱和相位频谱如图 5.16 所示。

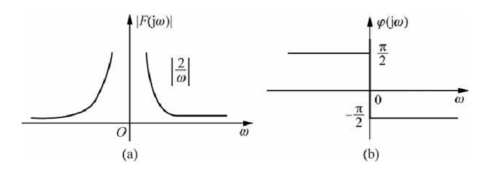
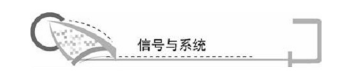


图 5.16　符号函数的幅度频谱和相位频谱



6. 单位阶跃信号 $u(t)$

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}$$

单位阶跃信号也不满足狄里赫利条件，但由于单位阶跃信号可以分解为符号函数与直流信号的和，即单位阶跃信号可以表示为

$$u(t)=\frac{1}{2}[u(t)+u(-t)]+\frac{1}{2}[u(t)-u(-t)]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

分解图如图 5.17 所示，因此可以利用已知符号函数和直流信号的频谱来求单位阶跃信号的频谱。

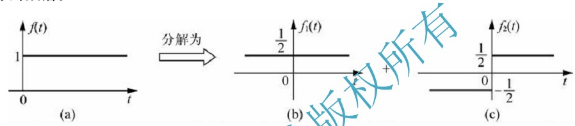


图 5.17　阶跃信号分解图

因此，单位阶跃信号的频谱函数为

$$FT[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega} \tag{5-35}$$

单位阶跃信号的幅度频谱和相位频谱如图 5.18 所示。

图 5.18　阶跃信号频谱图

充分利用常用信号的傅里叶变换对进一步掌握信号与系统的频域分析将会带来很大的方便。为了便于查找，在表 5-1 中给出了部分常用信号的傅里叶变换对。

表 5-1　部分常用傅里叶变换对

编号	名称	$f(t)$	$F(\mathrm{j}\omega)$
1	冲激函数	$E\delta(t)$	E
2	直流信号	E	$2\pi E\delta(\omega)$



续表

编号	名称	$f(t)$	$F(j\omega)$
3	矩形脉冲	$\begin{cases} E & \lvert t\rvert < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \lvert t\rvert \geqslant \frac{\tau}{2} \end{cases}$	$E\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
4	抽样脉冲	$\mathrm{Sa}(\omega_c t)$	$\begin{cases} \frac{\pi}{\omega_c} & \lvert\omega\rvert < \omega_c \\ 0 & \lvert\omega\rvert \geqslant \omega_c \end{cases}$
5	单边指数脉冲	$E\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t) \quad \alpha > 0$	$\frac{E}{\alpha + j\omega}$
6	双边指数脉冲	$E\mathrm{e}^{-\alpha\lvert t\rvert}u(t) \quad \alpha > 0$	$\frac{2\alpha E}{\alpha^2 + \omega^2}$
7	阶跃函数	$Eu(t)$	$E\pi\delta(\omega) + \frac{E}{j\omega}$
8	符号函数	$E\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} E & t > 0 \\ -E & t < 0 \end{cases}$	$\frac{2E}{j\omega}$
9	余弦信号	$E\cos(\omega_0 t)$	$E\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
10	正弦信号	$E\sin(\omega_0 t)$	$jE\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
11	复指数信号	$E\mathrm{e}^{\pm j\omega_0 t}$	$2E\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$
12	线性信号	$tu(t)$	$j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$
13	冲激序列	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

5.4 傅里叶变换的基本性质

傅里叶变换反映了连续时间非周期信号时间特性和频率特性之间的关系。任何一个信号既可以在时域内用时间函数 $f(t)$ 表示，也可以在频域内用频谱密度函数 $F(j\omega)$ 表示，两者是一一对应的，它们是在不同域内对同一信号的反映形式。在实际信号分析中，信号的频域特性更能反映信号的本质特征，灵活使用傅里叶变换的性质对于理解和应用非周期信号具有很重要的意义。下面介绍几个常用的性质。

1. 线性性质

若
$$f_1(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} F_1(\mathrm{j}\omega)$$
$$f_2(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} F_2(\mathrm{j}\omega)$$
则对于任意常数 a_1 和 a_2，满足
$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} a_1 F_1(\mathrm{j}\omega) + a_2 F_2(\mathrm{j}\omega) \tag{5-36}$$
进一步推广为
$$\sum_{i=1}^{N} a_i f_i(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} \sum_{i=1}^{N} a_i F(\mathrm{j}\omega) \quad i = 0,1,2,\cdots,N \tag{5-37}$$
其中 a_i 为常数，N 为正整数。

线性性质包含两个方面含义。

(1) 齐次性：表明若信号 $f(t)$ 乘以常数 a（即信号增大或减小 a 倍），则其频谱函数也乘以相同的常数 a（即频谱函数也增大或减小 a 倍）。

(2) 可加性：表明几个信号之和的频谱函数等于各信号的频谱函数之和。

【例 5.6】 已知信号 $f(t)$ 的波形如图 5.19 所示，求信号 $f(t)$ 的傅里叶变换。

【解题思路与技巧】 利用傅里叶变换的线性性质——叠加性和齐次性，将信号 $f(t)$ 分解为两个已知的或便于求解的两个信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的组合，然后分别求出这两个信号的傅里叶变换，最后将它们相加起来即可。

解：将 $f(t)$ 可看成两个方波信号的叠加，分解如图 5.20 所示。

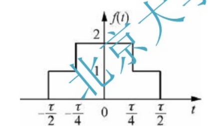


图 5.19 例 5.6 题波形图

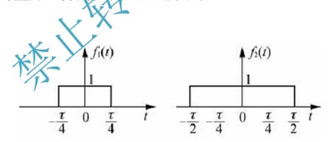


图 5.20 分解为两个矩形脉冲

由矩形脉冲信号的频谱，可得
$$F_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$
$$F_2(\mathrm{j}\omega) = \tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$
故由线性性质可得
$$F(\mathrm{j}\omega) = \frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) + \tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

2. 时移性质

时移性质也称为延时性质。





若 $f(t) \xleftrightarrow{FT} F(j\omega)$，则

$$f(t \pm t_0) \xleftrightarrow{FT} F(j\omega)e^{\pm j\omega t_0} \tag{5-38}$$

时移性质表明：在时域中信号沿时间轴右移(或左移) t_0，其频谱在频谱中所有频率"分量"相应落后(或超前)一个相位 ωt_0，而幅度保持不变。

【例 5.7】 已知脉冲宽度为 τ，脉冲高度为 E 的单矩形脉冲 $f_0(t)$ 的频谱为 $F_0(j\omega) = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$，如图 5.21 所示。

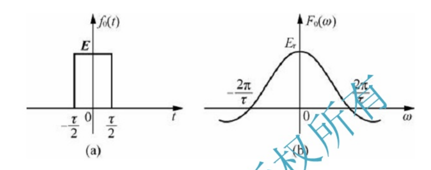


图 5.21　单矩形脉冲信号及频谱图

求由三个矩形脉冲信号叠加信号 $f(t) = f_0(t) + f_0(t+T) + f_0(t-T)$ 的频谱。

【解题思路与技巧】 该题利用傅里叶变换的时移性质可分别直接求出每一项的傅里叶变换，然后再根据线性性质叠加起来。

解： 利用傅里叶变换的线性和时移特性有

$$F(j\omega) = F_0(j\omega)(1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) = F_0(j\omega)[1 + 2\cos(\omega T)]$$

$$= E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)[1 + 2\cos(\omega T)]$$

信号波形和频谱如图 5.22 所示。

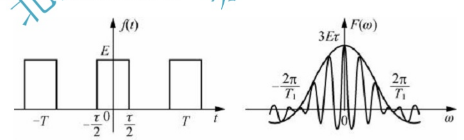


图 5.22　三脉冲信号波形及频谱图

3. 频移性质

若 $f(t) \xleftrightarrow{FT} F(j\omega)$，则

$$f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} F[j(\omega \mp \omega_0)] \tag{5-39}$$

式中 ω_0 为任意常数。

频移特性表明：信号 $f(t)$ 在时域中乘以复因子 $e^{j\omega_0 t}$，则在频域中将频谱函数沿 ω 轴搬移 ω_0 个单位。

【例 5.8】 已知矩形调幅信号 $f(t)=g(t)\cos\omega_0 t$ 如图 5.23 所示，其中 $g(t)$ 为矩形脉冲，脉幅为 E，脉宽为 τ。求其频谱函数。

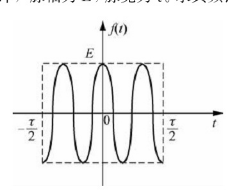


图 5.23 例 5.8 题图

【解题思路与技巧】 该题是矩形脉冲信号 $g(t)$ 与 $\cos\omega_0 t$ 的乘积，由于 $g(t)$ 的频谱是已知的，根据欧拉公式 $\cos\omega_0 t=\dfrac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$，即可用频移性质直接求解。

解： 已知矩形脉冲 $g(t)$ 的频谱 $G(j\omega)$ 为

$$G(j\omega)=E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

因为

$$f(t)=\frac{1}{2}g(t)(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})$$

根据频移特性，可得 $f(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$ 为

$$\begin{aligned}F(j\omega)&=\frac{1}{2}\{G[j(\omega+\omega_0)]+G[j(\omega-\omega_0)]\}\\&=\frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}[\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}]+\frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}[\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}]\end{aligned}$$

可见，调幅信号的频谱等于将包络线的频谱一分为二，各向左右移载频 ω_0。矩形调幅信号的频谱 $F(j\omega)$ 如图 5.24 所示。

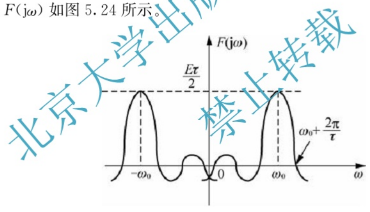


图 5.24 例 5.8 频谱图

【小思考】 为什么有时又将频移性质称为调制特性？

4. 尺度变换性质

若 $f(t)\xleftrightarrow{FT}F(j\omega)$，则

$$f(at)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{|a|}F\left(j\,\frac{\omega}{a}\right)\ (\alpha\text{ 为非零的实函数}) \tag{5-40}$$

尺度性质说明：信号在时域中压缩 $|\alpha|>1$，则在频域中扩展；反之，信号在时域中扩展 $|\alpha|<1$，在频域中一定压缩，即信号的脉宽与频宽成反比。

【知识要点提醒】 一般对于时限信号(时间有限信号)，其频宽无限。

尺度变换性质和时移性质相结合容易得到以下结果

若

$$f(t)\xleftrightarrow{\text{FT}}F(\mathrm{j}\omega)$$

则

$$f(at-b)\xleftrightarrow{\text{FT}}\frac{1}{|a|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{b}{a}\omega}F\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{a}\right)$$

特别是：当取 $\alpha=-1$ 时，有

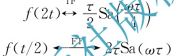
$$f((-t)\xleftrightarrow{\text{FT}}F(-\mathrm{j}\omega) \tag{5-41}$$

该式也称为时间倒置定理。

【例 5.9】 已知信号 $f(t)$ 及其频谱为 $f(t)\xleftrightarrow{\text{FT}}\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$，求 $f(2t)$ 和 $f\left(\frac{t}{2}\right)$ 的频谱函数。

【解题思路与技巧】 直接用尺度变换性质求解。

解： 根据傅里叶变换的尺度变换特性，$f(2t)$ 和 $f\left(\frac{t}{2}\right)$ 的频谱函数分别为



$$f(2t)\overset{\text{TF}}{\leftrightarrow}\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$f(t/2)\xleftrightarrow{\text{FT}}2\tau\mathrm{Sa}(\omega\tau)$$

其波形和频谱如图 5.25 所示。

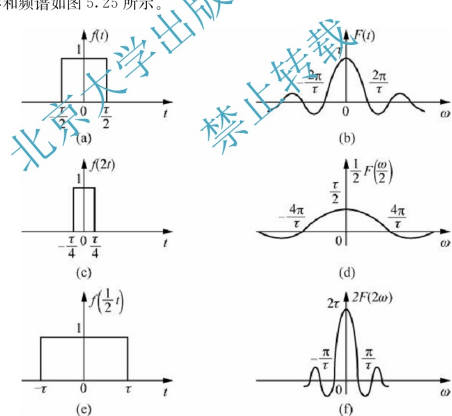


图 5.25　例 5.9 题波形图

5. 互易性质

互易性质也称为对称性质。

若 $f(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} F(\mathrm{j}\omega)$，则

$$F(\mathrm{j}t) \xleftrightarrow{\text{FT}} 2\pi f(-\omega) \tag{5-42}$$

互易性质表明：时间函数 $F(\mathrm{j}t)$（它与原信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 形式相同）的傅里叶变换是 $2\pi f(-\omega)$。频谱函数 $2\pi f(-\omega)$（除系数外，它与原信号 $f(t)$ 有相同的形式）。

【知识要点提醒】 互易性经常用在傅里叶变换定义很难求解的题目——如分母有自变量 $\frac{1}{t}$ 的函数，就需要考虑用互易性质求解。

【例 5.10】 求信号 $f(t)=\frac{1}{t}$ 的频谱函数。

【解题思路与技巧】 本题由于分母有自变量 $\frac{1}{t}$，根据互易性质特点可以与分母带有 $\frac{1}{\omega}$ 的函数进行互易。

解： 已知符号函数的傅里叶变换为

$$\mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

由傅里叶变换的互易性质可得

$$\frac{2}{\mathrm{j}t} \xleftrightarrow{\text{FT}} 2\pi\mathrm{sgn}(-\omega) = -2\pi\mathrm{sgn}(\omega)$$

由傅里叶变换的线性特性得

$$\frac{1}{\mathrm{j}t} \xleftrightarrow{\text{FT}} \pi\mathrm{sgn}(-\omega)$$

故

$$\frac{1}{t} \xleftrightarrow{\text{FT}} \mathrm{j}\pi\mathrm{sgn}(-\omega) = -\mathrm{j}\pi\mathrm{sgn}(\omega)$$

【例 5.11】 试求函数 $\frac{\sin t}{t}$ 的频谱函数。

【解题思路与技巧】 根据互易性质，函数 $\mathrm{Sa}t=\frac{\sin t}{t}$ 可以与矩形脉冲信号进行互易。

解： 因为 $f(t)=\begin{cases} E & |t|<\frac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2} \end{cases}$ 的傅里叶变换为 $\mathrm{FT}[f(t)]=E\tau\mathrm{Sa}\frac{\omega\tau}{2}$，所以 $f(t)=\begin{cases} 1 & |t|<1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases}$ 的傅里叶变换为 $F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{FT}[f(t)]=2\mathrm{Sa}\omega$。

根据傅里叶变换的互易性质可得

$$\mathrm{FT}[f(t)]=\mathrm{FT}\left[\frac{2\sin t}{t}\right]=\mathrm{FT}[2\mathrm{Sa}t]=2\pi f(\omega)=\begin{cases} 2\pi & |\omega|<1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases}$$



两边同乘以 $\frac{1}{2}$，得

$$\mathrm{FT}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}=\pi[u(\omega+1)-u(\omega-1)]$$

对应的变换波形如图 5.26 所示。

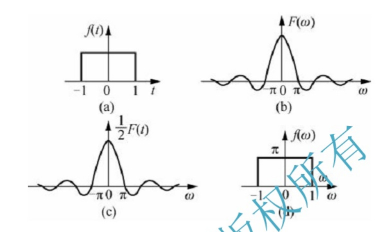


图 5.26 例 5.11 题波形图

【小思考】 在学过的信号中，哪些具有互易性？

6. 时域卷积性质

若 $f_1(t) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} F_1(\mathrm{j}\omega)$，$f_2(t) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} F_2(\mathrm{j}\omega)$，则

$$f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} F_1(\mathrm{j}\omega)\cdot F_2(\mathrm{j}\omega) \tag{5-43}$$

时域卷积性质表明：两个信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在时域内的卷积运算可以转换成在频域中两个信号傅里叶变换的乘法运算。

【例 5.12】 求图 5.27 所示宽度为 2τ，幅度为 τ 的三角形脉冲信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$。

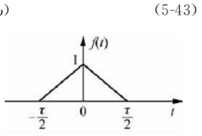


图 5.27 例 5.12 题波形图

【解题思路与技巧】 本题可以有多种求解方法，为了应用时域卷积性质，将三角波分解为两个矩形脉冲的卷积积分。

解： 由于信号 $f(t)$ 可以分解为两个宽度为 τ，幅度为 1 的矩形脉冲信号 $g(t)$ 的卷积，波形如图 5.28 所示。即

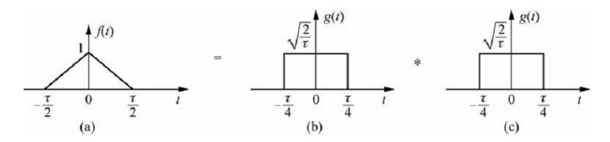


图 5.28 三角波信号分解图

$$g(t) * g(t) = f(t)$$

由于

$$g(t) = \frac{2}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{4}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{4}\right)\right]$$

而

$$g(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \sqrt{\frac{\tau}{2}}\,\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

所以，利用卷积特性可得

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{\tau}{2}\text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

7. 频域卷积性质

若

$$f_1(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} F_1(\text{j}\omega),\ f_2(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} F_2(\text{j}\omega)$$

则

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{2\pi}F_1(\text{j}\omega) * F_2(\text{j}\omega) \tag{5-44}$$

频域卷积性质表明：两信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在时域的乘积运算，可以转换为两信号的频谱在频域的卷积积分运算，其幅值为乘积的 $\frac{1}{2\pi}$。

【例 5.13】 求余弦脉冲 $f(t) = E\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right),|t|<\frac{\tau}{2}$ 的频谱函数。

【解题思路与技巧】 本题可以将 $f(t)$ 看成幅值为 E，宽度为 τ 的矩形脉冲与 $\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)$ 的乘积，然后用频域卷积性质计算。这种类型的题一般要求卷积计算较为简单，如 $\delta(t)$ 函数。

解：余弦脉冲可看作一个矩形脉冲 $g(t)$ 与无穷长余弦函数 $\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)$ 的乘积，即

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)g(t)$$

由于矩形脉冲信号为

$$g(t) = \begin{cases} E & |t|<\frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

又因为

$$G(\text{j}\omega) = FT[g(t)] = E\tau\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

余弦信号的频谱查表5-1 可得

$$\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \xleftrightarrow{\text{FT}} \pi\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\pi\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)$$



根据傅里叶变换的频域卷积定理可知

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}G(\mathrm{j}\omega)*\left[\pi\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\pi\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\right]=\frac{2E\tau\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\pi\left[1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^{2}\right]}$$

余弦脉冲信号的频谱如图 5.29 所示。

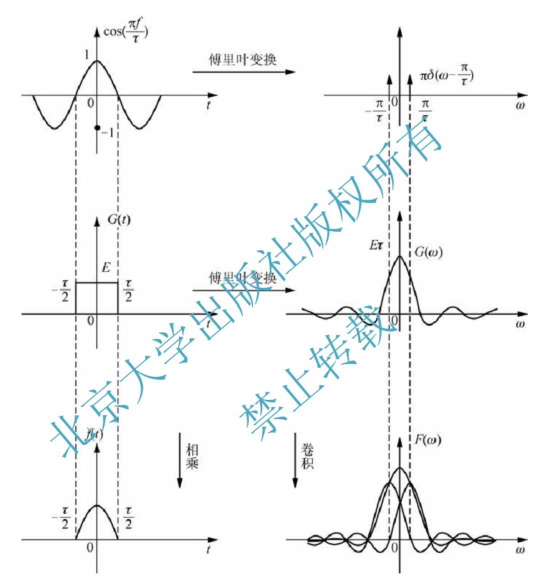


图 5.29　余弦脉冲信号的频谱图

8. 时域微分性质

若 $f(t)\xleftrightarrow{\text{FT}}F(\mathrm{j}\omega)$，则

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\xleftrightarrow{\text{FT}}\mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)\tag{5-45}$$

同理，可进一步有

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{FT} (j\omega)^n F(j\omega) \tag{5-46}$$

时域微分性质表明：对时域信号 $f(t)$ 的微分 $f'(t)$ 的频谱函数等于原信号 $f(t)$ 信号的频谱函数 $F(j\omega)$ 乘以 $j\omega$。

9. 频域微分性质

若 $f(t) \xleftrightarrow{FT} F(j\omega)$，则

$$\frac{dF(j\omega)}{d\omega} \xleftrightarrow{FT} (-jt)f(t) \tag{5-47}$$

可推广

$$\frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n} \xleftrightarrow{FT} (-jt)^n f(t) \tag{5-48}$$

频域微分性质表明：时域信号 $f(t)$ 乘以 $-jt$，等于 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 的微分。

【知识要点提醒】 频域微分性质经常用于求解 $t^n f(t)$ 信号的频谱，由于信号 $tf(t)$ 的频谱用定义来求解比较困难，借助于频域微分性质就比较简单。

【例 5.14】 求单位斜变信号 $tu(t)$ 的频谱函数。

【解题思路与技巧】 由于函数属于 $tf(t)$ 这类信号，一般采用频域微分性质求解。

解： 已知单位阶跃信号 $u(t)$ 的傅里叶变换为

$$u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

根据频域微分性质，可得

$$-jtu(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$$

由线性性质

$$tu(t) \xleftrightarrow{FT} j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$$

即

$$tu(t) \xleftrightarrow{FT} -\frac{1}{\omega^2} + j\pi\delta'(\omega)$$

10. 时域积分特性

若 $f(t) \xleftrightarrow{FT} F(j\omega)$，则

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \xleftrightarrow{FT} \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \tag{5-49}$$

说明在时域积分运算中，有

$$F(0) = F(j\omega)|_{\omega=0}$$

若满足 $F(0) = F(j\omega)|_{\omega=0} = 0$，时域积分性质可简写为

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \xleftrightarrow{FT} \frac{F(j\omega)}{j\omega} \tag{5-50}$$



【知识要点提醒】 通过时域微分性质和时域积分性质比较可以发现，在时域对信号 $f(t)$ 进行微分运算，相当于在频域对频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 乘以 $\mathrm{j}\omega$。而在时域对信号 $f(t)$ 进行积分运算，相当于在频域对频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 除以 $\mathrm{j}\omega$。

【例 5.15】 用时域积分特性求例 5.4 中图 5.6 所示函数的傅里叶变换。

【解题思路与技巧】 对于函数 $f(t)$ 微分的傅里叶变换容易求解的函数，通常采用时域积分性质求解。

解： 函数表达式为

$$f(t)=\frac{2E}{T}t\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$

对 $f(t)$ 求导数

$$f_1(t)=f'(t)=\frac{2E}{T}\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]-E\left[\delta\left(t+\frac{T}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$

波形如图 5.30 所示。

$$f_1(t)\xleftrightarrow{\mathrm{FT}}F_1(\mathrm{j}\omega)=2E\cdot\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)-E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}})$$

$$=2E\cdot\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)-2E\cos\frac{\omega T}{2}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{2E}{\mathrm{j}\omega}\left[\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)-\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]$$

$$=\mathrm{j}\,\frac{2E}{\omega}\left[\cos\left(\frac{\omega T}{2}-\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)\right]$$

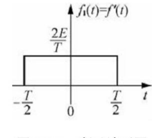
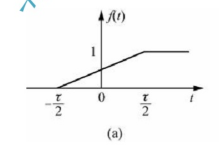


图 5.30　$f'(t)$ 波形图

【例 5.16】 已知信号 $f(t)$ 如图 5.31(a)所示，求 $F(\mathrm{j}\omega)$。

【解题思路与技巧】 直接用时域积分性质求解。

解： $f(t)$ 的微分如图 5.31(b)所示，其傅里叶变换为



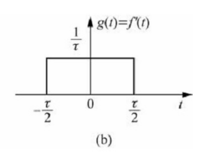


图 5.31　例 5.16 题波形图

$$\mathrm{FT}[f'(t)]=G(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

根据傅里叶变换的积分特性，可得

$$F(\omega)=\pi G(0)\delta(\omega)+\frac{G(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$

由于



$$G(0)=G(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\Big|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathrm{d}t=1$$

($g(t)$ 所包含的面积为 1)代入上式

$$F(\mathrm{j}\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

【例 5.17】 已知三角形脉冲信号

$$f(t)=\begin{cases}1-\dfrac{2}{\tau}|t| & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\[2mm] 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

求信号的频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$。

【解题思路与技巧】 直接用时域积分性质求解。

解: $f(t)$ 的波形如图 5.32 所示。

对 $f(t)$ 求一阶导数和二阶导数，其波形如图 5.33(a)和图 5.33(b)所示。

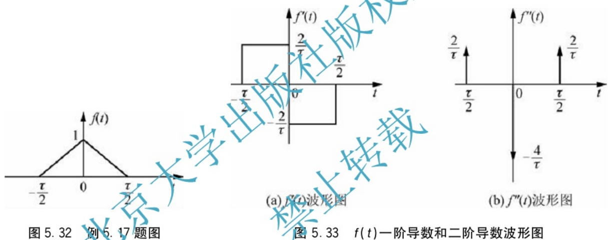


图 5.32 例 5.17 题图

图 5.33 $f(t)$一阶导数和二阶导数波形图

由图可知

$$f''(t)=\frac{2}{\tau}\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\frac{4}{\tau}\delta(t)+\frac{2}{\tau}\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

显然,三角波信号 $f(t)$ 是冲激信号组合 $f''(t)$ 的二重积分，即

$$f(t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{x}f''(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

因此，下面用时域积分性质来求解。

由于 $\delta(t)\xrightarrow{\mathrm{FT}}1$，根据傅里叶变换的时移性质，可得

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{FT}[f''(t)]=\frac{2}{\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega}-\frac{4}{\tau}+\frac{2}{\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega}$$

$$=\frac{2}{\tau}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega}-2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega})=\frac{4}{\tau}\left(\cos\frac{\omega\tau}{2}-1\right)$$

$$=-\frac{8\sin^2\dfrac{\omega\tau}{4}}{\tau}$$



由图 5.33(a)和图 5.33(b)可知，$F_1(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\mathrm{d}i=0$ 和 $F_2(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f''(t)\mathrm{d}i=0$。因此

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{FT}[f(t)]=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2}F_2(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2}\left[-\frac{8\sin^2\frac{\omega\tau}{4}}{\tau}\right]$$

$$=\frac{8\sin^2\frac{\omega\tau}{4}}{\omega^2\tau}=\frac{\tau}{2}\frac{\sin^2\frac{\omega\tau}{4}}{\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)^2}=\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

结果与例 5.12 相同。

11. 频域积分性质

设 $f(t)\xleftrightarrow{\mathrm{FT}}F(\mathrm{j}\omega)$，则

$$\pi f(0)\delta(t)+\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}\xleftrightarrow{\mathrm{FT}}\int_{-\infty}^{\omega}F(\mathrm{j}\eta)\mathrm{d}\eta \tag{5-51}$$

如果 $f(0)=0$，则有

$$\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}\xleftrightarrow{\mathrm{FT}}\int_{-\infty}^{\omega}F(\mathrm{j}\eta)\mathrm{d}\eta \tag{5-52}$$

【例 5.18】 求信号 $\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin t}{t}$ 的频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$。

【解题思路与技巧】 对于函数中带有 $\frac{1}{t}f(t)$，可以考虑使用频域积分性质。

解： 先求 $\sin t$ 的频谱函数 $F_1(\mathrm{j}\omega)$

$$f_1(t)=\sin t=\frac{1}{2\mathrm{j}}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}]$$

$$F_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\mathrm{j}}[2\pi\delta(\omega-1)-2\pi\delta(\omega+1)]=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$$

由于 $f(t)=\sin t$，显然有 $f(0)=0$，故有

$$\mathrm{FT}\left[\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}\right]=\mathrm{FT}\left[\frac{\sin t}{-\mathrm{j}t}\right]=\mathrm{j}\pi\int_{-\infty}^{\omega}[\delta(\eta+1)-\delta(\eta-1)]\mathrm{d}\eta$$

$$=\begin{cases}0 & \omega<-1\\ \mathrm{j}\pi & -1<\omega<1\\ 0 & \omega>1\end{cases}$$

两边乘以 $(-\mathrm{j})$，得

$$\mathrm{FT}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\begin{cases}0 & \omega<-1\\ \pi & -1<\omega<1\\ 0 & \omega>1\end{cases}$$

或写为

$$\mathrm{FT}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$$

所得结果与例 5.11 相同。

12. 奇偶性

通常遇到的信号都是实信号，虚信号是为了数学运算上的方便而引入的。现在研究时间函数 $f(t)$ 与其频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 之间的奇偶虚实关系。

如果 $f(t)$ 是时间 t 的实函数，由于 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t-\mathrm{j}\sin\omega t$，则其傅里叶变换

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$
$$=R(\omega)-\mathrm{j}X(\omega)=|F(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

可见，$F(\mathrm{j}\omega)$ 是复函数，可以表示成模与相位或者实部与虚部两部分，即

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

同时有

$$|F(\mathrm{j}\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega)=\arctan\left[\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right]$$

$R(\omega)$ 为实偶函数，$X(\omega)$ 为虚奇函数。因此可以得到

$$F(-\mathrm{j}\omega)=F^*(\mathrm{j}\omega) \tag{5-53}$$

可得 $|F(\mathrm{j}\omega)|$ 是偶函数，$\varphi(\omega)$ 是奇函数，即实函数的傅里叶变换的幅度谱和相位谱分别为偶函数和奇函数。

下面考察 $f(t)$ 的奇偶性对 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的影响。

当 $f(t)$ 为时间 t 的实函数且为偶函数时，$f(t)\sin\omega t$ 是时间 t 的奇函数，$f(t)\cos\omega t$ 是时间 t 的偶函数，此时

$$\begin{cases}R(\omega)=2\int_{0}^{\infty}f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t\\ X(\omega)=0\end{cases}$$

因此，$F(\mathrm{j}\omega)=2R(\omega)=2\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$

可看出 $F(\mathrm{j}\omega)$ 是 ω 实偶函数。

当 $f(t)$ 为时间 t 的实函数且为奇函数时，求得 $R(\omega)=0$，此时

$$F(\mathrm{j}\omega)=-2\mathrm{j}X(\omega)=-2\mathrm{j}\int_{0}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

由此可看出，$F(\mathrm{j}\omega)$ 是 ω 的虚函数且为奇函数。

无论 $f(t)$ 为实函数或复函数，都具有以下性质。



(1) 如果 $f(t)$ 是 t 的实函数，且设

$$f(t)\xrightarrow{FT}F(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

则有

$$\begin{cases}R(\omega)=R(-\omega),X(\omega)=-X(-\omega)\\F(\omega)=F(-\omega),\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)\end{cases}\tag{5-54}$$

$$f(-t)\xleftrightarrow{\mathrm{FT}}F(-\mathrm{j}\omega)=\overset{*}{F}(\mathrm{j}\omega)\tag{5-55}$$

$$\text{如 } f(t)=f(-t)\text{，则 } X(\omega)=0,F(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)\tag{5-56}$$

如 $f(t)=-f(-t)$ 则

$$R(\omega)=0$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}X(\omega)\tag{5-57}$$

(2) 如果 $f(t)$ 是 t 的虚函数，则有

$$\begin{cases}R(\omega)=-R(-\omega),X(\omega)=X(-\omega)\\F(\omega)=F(-\omega),\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)\end{cases}\tag{5-58}$$

$$f(-t)\xleftrightarrow{\mathrm{FT}}F(-\mathrm{j}\omega)=-\overset{*}{F}(\mathrm{j}\omega)\tag{5-59}$$

根据以上方法，也可以推出当 $f(t)$ 为复函数时的一般情况。

由于任何实信号都可以分解为偶函数分量和奇函数分量之和，即

$$f(t)=\frac{[f(t)+f(-t)]}{2}+\frac{[f(t)-f(-t)]}{2}=f_{\mathrm{e}}(t)+f_{\mathrm{o}}(t)\tag{5-60}$$

则其傅里叶变换

$$f_{\mathrm{e}}(t)\xrightarrow{\mathrm{FT}}\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}\omega)+F^{*}(\mathrm{j}\omega)]=F_R(\mathrm{j}\omega)\tag{5-61}$$

$$f_{\mathrm{o}}(t)\xrightarrow{\mathrm{FT}}\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}\omega)-F^{*}(\mathrm{j}\omega)]=\mathrm{j}F_I(\mathrm{j}\omega)\tag{5-62}$$

【例 5.19】 求双边指数信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha|t|}\,(-\infty<t<\infty)$ 的傅里叶变换。

【解题思路与技巧】 由于本题 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha|t|}$ 是 $\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$ 的偶函数分量，利用傅里叶变换奇偶性求解。

解：由傅里叶变换可知

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)\xleftrightarrow{\mathrm{FT}}\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}=\frac{\alpha-\mathrm{j}\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

由于

$$f_{\mathrm{e}}(t)=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)+\mathrm{e}^{\alpha t}u(-t)]=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha|t|}$$

由式(5-61)可得

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha|t|}\xleftrightarrow{\mathrm{FT}}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}\right)=\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

因此，有

$$e^{-\alpha|t|} \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

13. 帕塞瓦尔定理

设 $f(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} F(\mathrm{j}\omega)$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\mathrm{j}\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \tag{5-63}$$

【知识要点提醒】 帕塞瓦尔定理说明：非周期信号在时域中的能量通过傅里叶变换到频域内，其能量保持不变，即满足能量守恒。

以上讨论了部分傅里叶变换的性质，为了便于查找列于表 5-2。

表 5-2　傅里叶变换的性质

性质名称	时　　域	频　　域
线性	$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} a_i F_i(\mathrm{j}\omega)$
时移	$f(t\pm t_0)$	$F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t_0}$
频移	$f(t)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0 t}$	$F[\mathrm{j}(\omega\mp\omega_0)]$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$
对称性	$F(\mathrm{j}t)$	$2\pi f(-\omega)$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$
时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\mathrm{j}\omega)\cdot F_2(\mathrm{j}\omega)$
频域卷积	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$
时域微分	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{j}\omega)^n F_1(\mathrm{j}\omega)$
频域微分	$(-\mathrm{j}t)^n f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$
频域积分	$\pi f(0)\delta(t)+\frac{1}{-\mathrm{j}t}f(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\eta)\mathrm{d}\eta$
奇偶性	$f(t)$ 为实函数	$\|F(\mathrm{j}\omega)\| = \|F(-\mathrm{j}\omega)\|, \varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$ $R(\omega)=R(-\omega), X(\omega)=-X(-\omega)$ $F(-\mathrm{j}\omega)=F^*(\mathrm{j}\omega)$
	$f(t)$ 为实函数且 $f(t)=f(-t)$	$F(\mathrm{j}\omega)=R(\omega), X(\omega)=0$
	$f(t)$ 为实函数且 $f(t)=-f(-t)$	$F(\mathrm{j}\omega)=-X(\omega), R(\omega)=0$
帕塞瓦尔定理	$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\mathrm{d}t$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|F(\mathrm{j}\omega)\|^2\mathrm{d}\omega$



5.5 周期信号的傅里叶变换

前面讨论的是非周期信号的傅里叶变换，下面讨论周期信号的傅里叶变换的特点以及它与傅里叶级数之间的联系，目的是将周期信号与非周期信号的分析方法统一起来，使傅里叶变换得到更广泛的应用。根据傅里叶变换存在的条件，周期信号不满足绝对可积条件，但在引入特殊函数后，从极限的观点来分析，周期信号也可以进行傅里叶变换。下面借助傅里叶变换的频移特性先推导出指数、余弦、正弦信号的频谱函数，然后进一步讨论一般周期信号的傅里叶变换。

5.5.1 复指数函数 $e^{j\omega_c t}$ 的傅里叶变换

若

$$f(t) \to F(j\omega)$$

由傅里叶变换频移特性可知

$$\mathrm{FT}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F[j(\omega-\omega_0)]$$

在上式中令 $f(t)=1$，则 $f(t)$ 的傅里叶变换

$$F(j\omega)=\mathrm{FT}[1]=2\pi\delta(\omega)$$

所以

$$\mathrm{FT}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{5-64}$$

同理

$$\mathrm{FT}[e^{-j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega+\omega_0) \tag{5-65}$$

5.5.2 余弦、正弦信号的傅里叶变换

由欧拉公式知

$$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}(e^{j\omega_{0c} t}+e^{-j\omega_0 t})$$

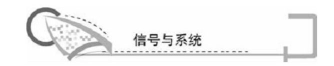
$$\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega_{0c} t}-e^{-j\omega_0 t})$$

由式(5-64)、式(5-65)，可以得到

$$\mathrm{FT}[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)] \tag{5-66}$$

$$\mathrm{FT}[\sin\omega_0 t]=j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)] \tag{5-67}$$

由此可见，指数、余弦和正弦信号的频谱只包含位于 $\pm\omega_c$ 处的冲激函数。正弦信号和余弦信号的频谱如图 5.34 所示。



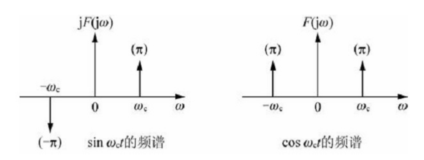


图 5.34　正弦、余弦频谱图

5.5.3　一般周期信号的傅里叶变换

设一个周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 的信号 $f(t)$ 可以用傅里叶级数将其展开为基波及各次谐波之和来表示，即

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$$

其中

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt,\ \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

此周期信号的傅里叶变换为

$$F(j\omega)=FT[f(t)]=FT\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot FT[e^{jn\omega_0 t}]$$

根据式(5-64)，上式可写成

$$F(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)\tag{5-68}$$

由式(5-68)可见，周期信号的频谱函数由无穷多个冲激函数组成，冲激函数位于信号的谐波频率($0,\pm\omega_0,\pm 2\omega_0,\cdots$)处，每个冲激的强度等于 $f(t)$ 的傅里叶级数相应系数 F_n 的 2π 倍。

【知识要点提醒】 周期信号的频谱与傅里叶级数一样都是离散的。然而，由于傅里叶变换是反映频谱密度的概念，因此周期信号的傅里叶变换不同于傅里叶级数，不是有限值而是冲激函数，它表明在无穷小的频带范围内(即谐频点)取得了无限大的频谱值。

【例 5.20】 周期单位冲激序列 $\delta_T(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，如图 5.35 所示，求其傅里叶变换，并画出频谱图。

【解题思路与技巧】 先根据定义直接求出傅里叶级数系数 F_n，再代入到周期信号傅里叶变换公式(5-68)中即可。

解： $\delta_{T_1}(t)$ 是周期为 T 的周期信号，在间隔 $-\dfrac{T}{2}<t<\dfrac{T}{2}$ 内，$\delta_{T_1}(t)=\delta(t)$，求其傅里



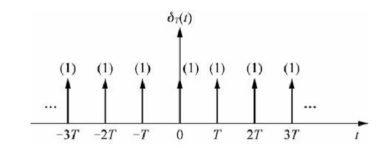


图 5.35 例 5.20 题周期单位冲激序列波形图

叶级数系数

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}$$

代入式(5-68)可得

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{FT}[\delta_T(t)]=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0) \tag{5-69}$$

周期单位冲激序列的频谱如图 5.36 所示。由此可见，周期单位冲激序列的傅里叶变换仍是一个包含位于 $\omega=0,\pm\omega_0,\pm 2\omega_0,\cdots,\pm n\omega_0,\cdots$频率处的冲激序列，其冲激强度相等，等于 ω_0。

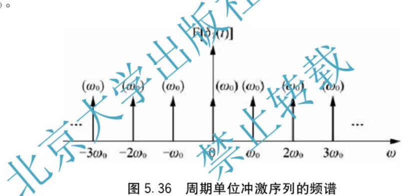


图 5.36 周期单位冲激序列的频谱

5.5.4 周期信号傅里叶级数系数 F_n 与频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的关系

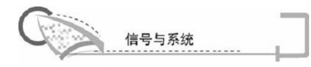
从上面的分析可以看出，若要求周期信号的频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$，首先求出周期信号的傅里叶级数的系数 F_n，再利用式(5-68)来求出 $F(\mathrm{j}\omega)$，由于求周期信号的傅里叶级数比较麻烦，下面讨论如何在不求傅里叶级数系数 F_n 的情况下，直接求周期信号的频谱。

首先分析傅里叶级数系数 F_n 与频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的关系。

设 $f(t)$ 是从周期信号 $f_T(t)$ 中取一个周期$\left(-\frac{T}{2}\sim\frac{T}{2}\right)$得到的，则 $f(t)$ 为一个非周期信号，由傅里叶变换可以得到

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{5-70}$$

而 $f_T(t)$ 为周期信号，其傅里叶级数的系数为



$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \tag{5-71}$$

比较式(5-70)和式(5-71)可以得到

$$F_n = \frac{1}{T}F(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0} \tag{5-72}$$

【知识要点提醒】 周期信号傅里叶级数的系数 F_n 可以通过求其在一个周期的傅里叶变换 $F(\mathrm{j}\omega)$来得到。

【例 5.21】 求如图 5.37 所示周期矩形脉冲信号 $f_T(t)$ 的傅里叶级数。

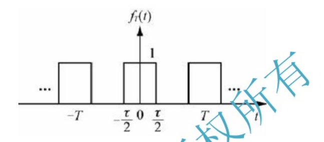


图 5.37 例 5.21 周期矩形脉冲信号波形图

【解题思路与技巧】 先求出一个周期的傅里叶变换 $F(\mathrm{j}\omega)$，再代入式(5-72)求出 F_n，最后将 F_n 代入周期信号傅里叶变换公式(5-68)中即可。

解：从 $f_T(t)$ 中取第一个周期信号 $f(t)$

$$f(t) = \left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

由傅里叶变换

$$F(\mathrm{j}\omega) = \tau\mathrm{Sa}\,\frac{\omega\tau}{2}$$

由式(5-72)得

$$F_n = \frac{1}{T}F(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0} = \frac{\tau}{T}\mathrm{Sa}\,\frac{n\omega_0\tau}{2}$$

最后，得 $f_T(t)$ 的傅里叶级数为

$$f_T(t) = \frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\,\frac{n\omega_0\tau}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

周期矩形脉冲信号的频谱图如图 5.38 所示。

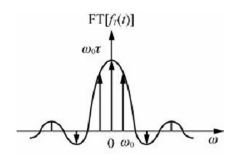


图 5.38 周期矩形脉冲频谱图



本章知识要点

1. 周期信号的傅里叶级数

1）三角形式的傅里叶级数

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)]$$

式中：$a_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\mathrm{d}t$，$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t$，$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t$。

另一种三角形式表达式

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

式中：$A_0=a_0$，$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，$\varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$。

2）指数形式的傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

系数

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

2. 周期信号的频谱

1）单边频谱和双边频谱

2）周期矩形脉冲信号频谱的特点

（1）离散性；（2）谐波性；（3）收敛性；（4）有效带宽。

3. 非周期信号的傅里叶变换

傅里叶变换　　$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{d}t$

傅里叶逆变换　　$f(t)=\mathrm{FT}^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$

4. 常用非周期信号的傅里叶变换

熟悉常用信号的傅里叶变换，见表5－1。

5. 傅里叶变换的基本性质

熟悉傅里叶变换的性质，见表5－2。

6. 周期信号的傅里叶变换

$$F(\mathrm{j}\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

或

$$F_n=\frac{1}{T}F(\mathrm{j}\omega)\bigg|_{\omega=n\omega_0}$$

周期信号傅里叶级数的系数 F_n 可以通过求其在一个周期的傅里叶变换 $F(\mathrm{j}\omega)$来得到。

习题 5

5.1　试将图 5.39 所示周期信号展开成三角形式和指数形式傅里叶级数。

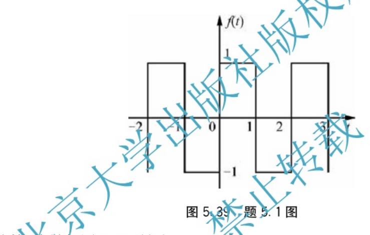


图 5.39　题 5.1 图

5.2　周期信号如图 5.40 所示。

求：(1) 图 5.40(a)的三角形式的傅里叶变换；

(2) 将 $f_1(t)$ 左移(或右移) $\frac{T}{2}$，得到 $f_2(t)$ 如图 5.40(b) 所示，求其傅里叶变换。

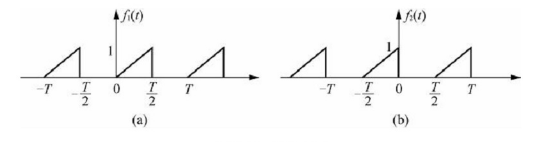


图 5.40　题 5.2 图

5.3　周期矩形信号如图 5.41 所示。若重复频率 $f=10\text{kHz}$，脉宽 $\tau=10\mu\text{s}$，幅度 $E=10\text{V}$，求直流分量大小以及基波、二次和三次谐波的有效值。

5.4　周期信号 $f(t)=3\cos t+\sin\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(8t-\frac{\pi}{3}\right)$，试分别画出此信号的单



边、双边幅度频谱和相位频谱图。

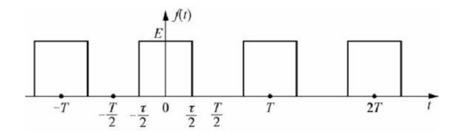


图 5.41　题 5.3 图

5.5　求下列信号的傅里叶变换。

(1) $f(t)=\delta(t+1)+\delta(t-1)$；　　(2) $f(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u(-t-2)+u(t-2)]$。

5.6　求图 5.42 波形的傅里叶变换。

5.7　求图 5.43 波形的傅里叶变换。

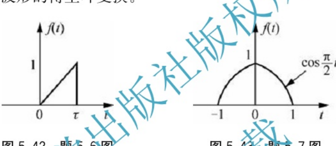


图 5.42　题 5.6 图　　图 5.43　题 5.7 图

5.8　试求图 5.44 所示函数的傅里叶逆变换。

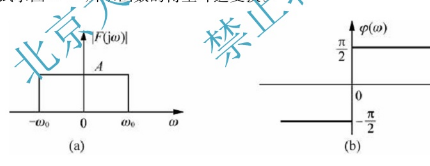


图 5.44　题 5.8 图

5.9　试求图 5.45 所示函数的傅里叶逆变换。

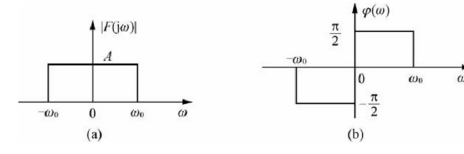


图 5.45　题 5.9 图

5.10　试求下列函数的傅里叶变换。

(1) $f_1(t)=\mathrm{e}^{-6t}u(t)$；(2) $f_2(t)=\mathrm{e}^{-3|t|}$。

5.11　已知 $f(t)\xleftrightarrow{\text{FT}}F(\mathrm{j}\omega)$，试利用傅里叶变换的性质，求下列函数的傅里叶变换。

(1) $f(1-t)$；　(2) $(t-6)f(t)$；　(3) $t\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$；

(4) $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$；　(5) $f(2t+5)$；　(6) $(1-t)f(1-t)$。

5.12　试求下列函数的傅里叶变换。

(1) $f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$；　(2) $f(t)=\dfrac{\sin 2\pi(t-2)}{\pi(t-2)}$；(3) $f(t)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}$。

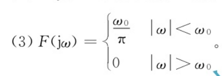
5.13　求信号 $f(t)=\dfrac{1}{\pi t}$ 的频谱函数。

5.14　试求图 5.46 所示信号的频谱函数。

5.15　利用傅里叶变换的对称性，求下列频谱函数的傅里叶逆变换。



(1) $F(\mathrm{j}\omega)=\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)$；　(2) $F(\mathrm{j}\omega)=u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)$；



(3) $F(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\dfrac{\omega_0}{\pi} & |\omega|<\omega_0\\ 0 & |\omega|>\omega_0\end{cases}$。

5.16　求图 5.47 所示信号的傅里叶变换。

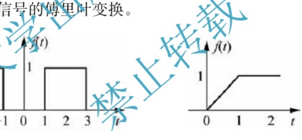


图 5.46　题 5.14 图

f(t)
1
0　1　2　t

图 5.47　题 5.16 图

5.17　求图 5.48 所示信号的傅里叶变换。

5.18　图 5.49 所示信号 $f(t)$，傅里叶变换 $F(\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$，利用傅里叶变换性质(不做积分运算)，求

(1) $\varphi(\omega)$；(2) $F(0)$；(3) $\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega$；(4) $\mathrm{Re}[F(\mathrm{j}\omega)]$ 的逆变换图形。

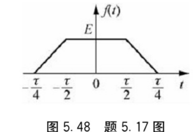


图 5.48　题 5.17 图

f(t)
2
-1　0　1　2　3　t

图 5.49　题 5.18 图

5.19　求下列周期信号的傅里叶变换。



(1) $f(t)=\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$；　　　　(2) $f(t)=1+\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{8}\right)$。

5.20　信号如图5.50所示，求其频谱函数。

该信号为升余弦脉冲，其表达式为

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\cos\pi t) & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$$

5.21　求图5.51所示周期信号的傅里叶变换。

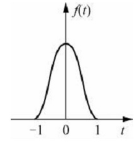


图5.50　题5.20图

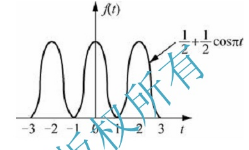


图5.51　题5.21图

5.22　已知周期信号 $f(t)$ 的波形分别如图5.52(a)和图5.52(b)所示，分别求对应的傅里叶变换 $F(j\omega)$。

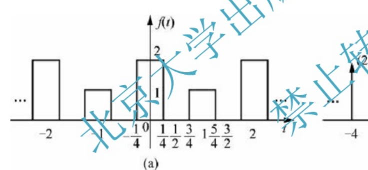
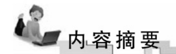


图5.52　题5.22图

第6章

连续时间系统的频域分析



内容摘要

本章主要介绍连续时间系统在频域中的描述，系统传递函数的概念及其计算方法，一般信号通过系统时所产生的零状态响应的频域分析，系统的无失真传输及其条件和理想滤波器。

教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识	工程应用方向
连续时间系统的频域描述	熟悉微分方程的频域描述 熟悉频域方程的建立	信号傅里叶变换和RLC的电抗	分析电路系统
系统的频域响应	掌握基本信号的响应 掌握系统函数的计算方法 掌握系统的零状态响应	系统响应的基本概念及其计算方法	系统频率特性分析
信号的传输与滤波	了解系统无失真传输的概念 熟悉系统无失真传输条件 掌握理想滤波器及其冲激响应 了解理想滤波器的阶跃响应	波形失真及滤波的概念	信号通信与滤波器设计



教学目标与要求

了解连续时间系统的频域描述。

掌握系统频域传递函数与冲激响应的关系。

掌握在一般信号激励下系统的频域响应。

熟悉系统无失真传输条件。

熟悉理想滤波器的概念。



对连续时间信号和系统的分析，第 3 章介绍了时域分析方法，本章介绍另一种非常重要的分析方法——频域分析法。

频域分析法反映了系统本质的关系，本章主要介绍连续时间线性时不变系统的频域零状态响应的求解方法；介绍系统的无失真传输和无失真传输条件、分析理想低通滤波器的冲激响应和阶跃响应。

6.1　连续时间系统的频域响应

6.1.1　连续时间系统的频域描述

一个连续时间线性时不变的系统，可以用一个 n 阶常系数线性微分方程来描述

$$\begin{aligned} &a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y'(t)+a_0 y(t) \\ &=b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 f'(t)+b_0(t) \end{aligned} \tag{6-1}$$

对方程两边取傅里叶变换，根据傅里叶变换的时域微分性质，可得

$$\begin{aligned} &[a_n(\mathrm{j}\omega)^n+a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1}+\cdots+a_1(\mathrm{j}\omega)+a_0]Y(\mathrm{j}\omega) \\ &=[b_m(\mathrm{j}\omega)^m+b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1}+\cdots+b_1(\mathrm{j}\omega)+b_0]F(\mathrm{j}\omega) \end{aligned}$$

如果不考虑系统的初始条件，则此时系统的输出为零状态响应(输出) $y_{zs}(t)$ 的傅里叶变换

$$\begin{aligned} Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)&=\frac{b_m(\mathrm{j}\omega)^m b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1}+\cdots+b_1(\mathrm{j}\omega)+b_0}{a_n(\mathrm{j}\omega)^n+a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1}+\cdots+a_1(\mathrm{j}\omega)+a_0}F(\mathrm{j}\omega) \\ &=H(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega) \end{aligned}$$

其中

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{b_m(\mathrm{j}\omega)^m b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1}+\cdots+b_1(\mathrm{j}\omega)+b_0}{a_n(\mathrm{j}\omega)^n+a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1}+\cdots+a_1(\mathrm{j}\omega)+a_0}=\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{F(\mathrm{j}\omega)} \tag{6-2}$$

$H(\mathrm{j}\omega)$ 定义为系统零状态下响应的频谱 $Y(\mathrm{j}\omega)$ 与激励频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$ 之比，称为系统的频域形式的系统(传递)函数或系统的频率响应。

系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$ 通常为 ω 的复函数，可写作

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} \tag{6-3}$$

其中，幅度 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 和相角 $\varphi(\omega)$ 都随 ω 的变化而变化，$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 是 ω 的偶函数；$\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数。$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 随 ω 变化的特性，称为系统的幅频特性；$\varphi(\omega)$ 随 ω 变化的特性，称为系统的相频特性。总称为系统的频率响应特性，简称频响特性。

由 $Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 可知，信号由输入到输出的变化在频域解释为：将激励信号的频谱加到系统中与系统函数相乘，得到输出信号响应的频谱。

【知识要点提醒】

系统特性在频域中是利用系统函数来描述的，系统函数的求解主要有以下几种方法。

(1) 当已知描述线性时不变系统的微分方程时，对方程两边取其傅里叶变换，直接

求取。

（2）在已知具体电路的情况下，可以利用电路零状态响应的频域等效电路模型直接列代数方程求取。

（3）如果已知系统的冲激响应，对其取傅里叶变换即可，$H(j\omega)=\text{FT}[h(t)]$

6.1.2 利用微分方程求系统函数

【例 6.1】 已知描述 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f'(t)+2f(t)$$

求系统的系统函数。

【解题思路与技巧】 本题需要将时域微分方程通过傅里叶变换转换成频域代数方程，然后求解此代数方程解出系统的传递函数。

解： 在零状态下，对微分方程两边取傅里叶变换，得

$$(j\omega)^2Y(j\omega)+5(j\omega)Y(j\omega)+6Y(j\omega)=(j\omega)F(j\omega)+2F(j\omega)$$

即

$$[(j\omega)^2+5(j\omega)+6]Y(j\omega)=(j\omega+2)F(j\omega)$$

所以系统的系统函数

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6}$$

【例 6.2】 已知描述 LTI 系统的冲激响应 $h(t)$ 为 $h(t)=(2e^{-2t}-e^{-3t})u(t)$ 求系统的频率响应 $H(j\omega)$。

【解题思路与技巧】 在已知 $h(t)$ 的情况下，通过 $h(t)$ 与 $H(j\omega)$ 的关系，求出 $H(j\omega)$ 的表达式。

解： 对 $h(t)$ 两边求傅里叶变换

$$H(j\omega)=\frac{2}{j\omega+2}-\frac{1}{j\omega+3}=\frac{j\omega+4}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6}$$

6.1.3 利用电路频域等效模型求系统函数

如果系统是由已知具体电路组成，可以利用电路零状态响应的频域等效电路模型直接列代数方程求取。

一般基本电路系统是由电阻、电容和电感构成，如图 6.1 所示，对于电阻 R、电感 L、电容 C，有

即

$$U_R(j\omega)=R\cdot I_R(j\omega) \tag{6-4}$$

$$U_L(j\omega)=j\omega L\cdot I_L(j\omega) \tag{6-5}$$



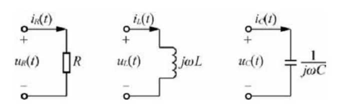


图 6.1　电阻、电感、电容的频域模型

$$I_C(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega C \cdot U_C(\mathrm{j}\omega) \tag{6-6}$$

将电路中的 R、L、C 元件用其在频域内的等效模型代替，即可得到简单电路系统的频域等效模型电路，然后用电路原理课程中学过的电路分析方法，求出其电路的系统(传递)函数。

【例 6.3】 试求图 6.2 所示的 RC 电路的系统(传递)函数 $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{U_o(\mathrm{j}\omega)}{I_S(\mathrm{j}\omega)}$

已知 $R_1 = 3\Omega, R_2 = 2\Omega, L = 1\mathrm{H}, C = 1\mathrm{F}$。

【解题思路与技巧】 本题先将电路图转换成频域等效电路，然后用电路基尔霍夫定律求解电路，得到 $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{Y(\mathrm{j}\omega)}{I_S(\mathrm{j}\omega)}$。

解： 画出电路的频域等效电路如图 6.3 所示，

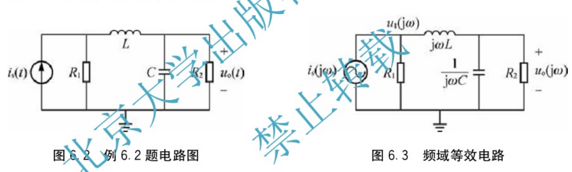


图 6.2　例 6.2 题电路图　　　　图 6.3　频域等效电路

设 $U_1(\mathrm{j}\omega)$ 为参考电压的频谱，由基尔霍夫电流定律，列出方程

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R}U_1(\mathrm{j}\omega) + \dfrac{U_1(\mathrm{j}\omega) - U_o(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega L} = I_S(\mathrm{j}\omega) \\ \mathrm{j}\omega C U_o(\mathrm{j}\omega) + \dfrac{1}{R_2}U_o(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{U_1(\mathrm{j}\omega) - U_o(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega L} \end{cases}$$

代入元件参数，整理得

$$2(\mathrm{j}\omega)^2 U_o(\mathrm{j}\omega) + 7(\mathrm{j}\omega)U_o(\mathrm{j}\omega) + 5U_o(\mathrm{j}\omega) = 6I_S(\mathrm{j}\omega)$$

因此，系统传递函数 $H(\mathrm{j}\omega)$

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{U_o(\mathrm{j}\omega)}{I_S(\mathrm{j}\omega)} = \frac{6}{2\,(\mathrm{j}\omega)^2 + 7\mathrm{j}\omega + 5}$$

6.2 系统的零状态响应

6.2.1 基本信号 $e^{j\omega t}$ 激励下系统的零状态响应

在研究系统的零状态响应之前，首先研究系统在基本信号 $f(t)=e^{j\omega t}$ 作用下的零状态响应。

若将角频率为 ω_0 的虚指数信号 $f(t)=e^{j\omega_0 t}$ 作用于冲激响应为 $h(t)$ 的线性时不变系统，其零状态响应为

$$
\begin{aligned}
y_{zs}(t) &= e^{j\omega_0 t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0 (t-\tau)} d\tau \\
&= e^{j\omega_0 t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = e^{j\omega_0 t} \cdot H(j\omega_0)
\end{aligned} \tag{6-7}
$$

其中

$$
H(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = H(j\omega)\big|_{\omega=\omega_0}
$$

式(6-7)表明：在一个线性时不变系统，将频率为 ω_0 的基本信号 $f(t)=e^{j\omega_0 t}$ 作用于该系统，产生的零状态响应是基本信号 $e^{j\omega_0 t}$ 乘以一个与时间 t 无关的常数 $H(j\omega_0)$，且为同频率的基本信号 $y_{zs}(t)=H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$。

利用上述特点，也可以方便的求解线性时不变系统的正弦激励的稳态响应。

当正弦信号从 $t=0\sim\infty$ 作用于系统时，系统的零状态响应也就是完全响应，而且是稳态响应。

【知识要点提醒】 若某线性时不变系统的激励 $f(t)=\cos\omega_0 t$，可以写成 $f(t)=\mathrm{Re}(e^{j\omega_0 t})$，根据式(6-7)，其零状态响应 $y_{zs}(t)=\mathrm{Re}[e^{j\omega_0 t}]H(j\omega_0)$，这里 $H(j\omega_0)=|H(j\omega_0)|e^{j\varphi(\omega_0)}$，那么响应 $y_{zs}(t)$ 可写为

$$
y_{zs}(t) = |H(j\omega_0)|\cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] \tag{6-8}
$$

式(6-8)表明：在正弦信号激励下，系统的稳态响应(零状态响应)仍然是同频率的正弦信号，其幅度值为正弦信号的幅度乘以 $|H(j\omega_0)|$，其相位移动取决于系统传递函数 $H(j\omega_0)$ 带来的相位 $\varphi(\omega_0)$。

【例 6.4】 已知系统的系统函数 $H(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+1}$

试分别求在信号 $\sin t$，$\sin\sqrt{2}t$，$\sin 3t$ 作用下，系统的稳态响应。

【解题思路与技巧】 对于输入信号为正弦信号时，求出 $H(j\omega)$ 的幅频特性和相频特性，其中，幅频特性与信号的模相乘作为输出信号的模，相频特性与输入信号相位的和是输出信号的相位。

解： 根据系统的系统函数可知，系统的幅频特性和相频特性分别为



$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \qquad \varphi(\omega) = -\arctan\omega$$

对于激励信号 $\sin t$，

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi(\omega) = -\arctan 1 = -45^\circ$$

则响应

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t-45^\circ)$$

对于激励信号 $\sin\sqrt{2}t$，

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \varphi(\omega) = -\arctan\sqrt{2} = -54.7^\circ$$

则响应

$$y(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{2}t-54.7^\circ)$$

对于激励信号 $\sin 3t$，

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{\sqrt{10}}{10},\ \varphi(\omega) = -\arctan 3 = -71.6^\circ$$

则响应

$$y(t) = \frac{\sqrt{10}}{10}\sin(3t-71.6^\circ)$$

【小思考】 在电路里学过的哪种电路分析适合于上述方法？

6.2.2　一般信号作用下系统的零状态响应及完全响应

由系统的时域分析可知，在时域时间内，求解线性时不变系统的零状态响应的方法是：利用卷积分析法 $y(t)=h(t)*f(t)$；根据傅里叶变换的时域卷积定理可知，系统在频率域的响应用 $Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 来计算，然后再利用傅里叶逆变换求零状态响应 $y(t)$。系统时域分析和频域分析的关系如图 6.4 所示。

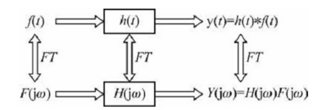


图 6.4　系统频域分析和时域分析的关系

【知识要点提醒】 在频域内求解 LTI 系统的零状态响应是一个间接的过程，具体步骤如下。

(1) 求输入(激励)信号 $f(t)$ 的傅里叶变换(频谱) $F(\mathrm{j}\omega)$。

(2) 求系统的系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$。

(3) 求系统零状态响应的频谱 $Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$。

(4) 求 $Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)$ 傅里叶逆变换即可求得时域的零状态响应

$$y_{zs}(t)=\mathrm{FT}^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)]$$

LTI 系统的完全响应等于系统的零输入响应加上零状态响应，即

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$

【例 6.5】 已知 LTI 因果系统的输出 $y(t)$ 和输入 $f(t)$ 可由下面微分方程来描述

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f''(t)+4f'(t)+5f(t)$$

激励信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$。求零状态响应 $y_{zs}(t)$。

【解题思路与技巧】 先将时域微分方程两边求傅里叶变换，然后对 $f(t)$ 求傅里叶变换，利用 $Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 求出 $Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)$。

解：对微分方程两边求傅里叶变换，可得系统函数

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{F(\mathrm{j}\omega)}=\frac{-\omega^2+\mathrm{j}4\omega+5}{-\omega^2+\mathrm{j}3\omega+2}=1+\frac{\mathrm{j}\omega+3}{-\omega^2+\mathrm{j}3\omega+2}=1+\frac{\mathrm{j}\omega+3}{(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)}$$

激励信号的傅里叶变换

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{FT}[f(t)]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+3}$$

零状态响应的频谱

$$Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+3}+\frac{1}{(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+3}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega+1}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}$$

则 $Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)$ 的傅里叶逆变换即为系统的零状态响应

$$y_{zs}(t)=\mathrm{FT}^{-1}[Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)]=(\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

【例 6.6】 已知一个因果 LTI 系统的输出 $y(t)$ 和输入 $f(t)$ 可用下面微分方程来描述

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+6y(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+4f(t)$$

已知激励 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，初始条件为 $y(0_-)=2, y'(0_-)=1$。

求：(1) 系统的冲激响应 $h(t)$。 (2) 系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。

(3) 系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。 (4) 系统的全响应 $y(t)$。

【解题思路与技巧】 本题利用频域的方法求解。

解：(1) 求系统的冲激响应 $h(t)$

微分方程两边在零状态下取傅里叶变换，得

$$(\mathrm{j}\omega)^2Y(\mathrm{j}\omega)+5\mathrm{j}\omega Y(\mathrm{j}\omega)+6Y(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)+4F(\mathrm{j}\omega)$$

则系统函数

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega+4}{(\mathrm{j}\omega)^2+\mathrm{j}5\omega+6}=\frac{2}{\mathrm{j}\omega+2}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega+3}$$

求 $H(\mathrm{j}\omega)$ 的傅里叶反变换，就可以求得系统的冲激响应为



$$h(t) = (2e^{-2t} - e^{-3t})u(t) \quad t > 0$$

（2）系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$

利用系统的时域分析方法求取该系统的零输入响应。

因为该系统的齐次微分方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 0$$

其特征根为

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3$$

故零输入响应的通解为

$$y_{zi}(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} \quad t > 0$$

将 $y(0_-) = 2, y'(0_-) = 1$ 代入，可解得

$$C_1 = 7, \quad C_2 = -5$$

则零输入响应

$$y_{zi}(t) = 7e^{-2t} - 5e^{-3t} \quad t > 0$$

（3）系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$

由于 $f(t) = e^{-t}u(t)$，可得 $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$

由此可得

$$Y_{zs}(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}\frac{j\omega + 4}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

利用部分分式展开，可求得 $Y_{zs}(j\omega)$ 的展开成为

$$Y_{zs}(j\omega) = \frac{3}{2}\frac{1}{j\omega + 1} - \frac{2}{j\omega + 2} + \frac{1}{2}\frac{1}{j\omega + 3}$$

求 $Y_{zs}(j\omega)$ 的傅里叶反变换，得到系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \quad t > 0$$

（4）系统的全响应 $y(t)$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = [\frac{3}{2}e^{-t} + 5e^{-2t} - \frac{9}{2}e^{-3t}]u(t)$$

【例 6.7】 已知一线性时不变系统(LTI)，系统传递函数 $H(j\omega) = \frac{j\omega}{-\omega^2 + 3j\omega + 2}$，输入信号如图 6.5 所示。

求：（1）系统的冲激响应 $h(t)$。（2）系统的初始条件 $y(0_-)$。（3）系统响应 $y(t)$。

【解题思路与技巧】 本题的解题关键是求系统的初始条件 $y(0_-)$，由于 $y(0_-) = y(t)|_{t=0_-}$ 的值，故要求出 $t < 0$ 时的 $y(t)$。

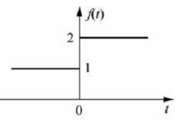


图 6.5 输入信号

解：（1）系统的冲激响应

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega}{-\omega^2+3\mathrm{j}\omega+2}=\frac{2}{\mathrm{j}\omega+2}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega+1}$$

因此

$$h(t)=(2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t})u(t)$$

(2) 系统的初始条件 $y(0_-)$

当 $t<0$ 时，$y(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$=\int_{-\infty}^{t}[2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=0$$

故系统的初始条件 $y(0_-)$

(3) 系统响应 $y(t)$

当 $t>0$ 时，$y(t)=f(t)*h(t)=\int_{0}^{t}2[2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-(t-\tau)}]\mathrm{d}\tau$

$$=2(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

6.3 系统的无失真传输

在现代信息技术中，对电子设备和信息传输性能要求越来越高，如在设计高保真音响时，要求扬声器中发出的声音与演唱者的声音一样，在手机通话时，要求通话的声音与讲话人的声音一致。若需要将一张照片通过互联网传输给其他人时，对方收到的图片要保持较高的清晰度，在电视中或电脑中播放电影或影视节目时，希望显示的图像连续、清晰。所有这些都要求信号在产生、传输和播放过程中保持无失真。

通常情况下，信号通过一个系统后，其响应的波形会与激励信号的波形有所不同，也就是信号在传输过程中会产生失真。那么，什么是失真呢？如何才能在信号的传输过程中，避免或减少失真呢？

6.3.1 失真的概念

失真是指当输入信号通过 LTI 系统时，其输出波形相对输入波形发生畸变，改变了原输入信号波形的形状。

系统失真通常有两大类：线性失真和非线性失真。

线性失真是指信号通过线性系统(不包含非线性元件组成的系统)所产生的失真，其特点是不会产生激励信号所包含的频率分量以外的频率成分。如信号通过线性放大器、衰减器等。

非线性失真是信号通过非线性系统(系统中包含非线性元件)所产生的失真，非线性失真的特点是响应中除了包含输入信号的频率成分外，还会产生激励信号中所没有的频率分



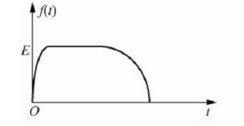
量。如信号通过半波整流电路，就会产生非线性失真。

【小思考】 在学过的课程中，哪些失真是线性失真？哪些是非线性失真？

下面研究系统的无失真传输条件。

6.3.2 系统的无失真传输条件

系统在时域内无失真传输是指当系统输入信号 $f(t)$ 时，输出响应 $y(t)$ 只能在幅度上放大或衰减，响应的时间可以延迟而波形的形状保持相同，如图 6.6 所示。



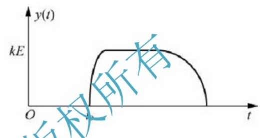


图 6.6 无失真传输系统的输入输出波形

即系统的输入信号为 $f(t)$，经过 LTI 系统后得到的输出响应信号为 $y(t)$，则系统在时域内无失真传输应满足

$$y(t) = kf(t - t_0) \tag{6-9}$$

式(6-9)为时域无失真传输条件。

其中，k 是常数，t_0 为系统延迟时间。

对于信号与系统的研究，除了在时域上反映其特点外，更重要的是在频域范围内(即频谱)能反映其本质特征。系统在频域内满足无失真传输，又应具备哪些条件呢？

设 $f(t)$ 激励和响应 $y(t)$ 的频谱分别为 $F(\mathrm{j}\omega)$ 和 $Y(\mathrm{j}\omega)$，根据傅里叶变换的时域平移定理，由式(6-9)可知

$$Y(\mathrm{j}\omega) = kF(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

又因为

$$Y(\mathrm{j}\omega) = F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$$

所以系统在频域内无失真传输的条件是传递函数 $H(\mathrm{j}\omega)$ 应该满足

$$H(\mathrm{j}\omega) = K\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} \tag{6-10}$$

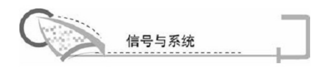
这里由于 $H(\mathrm{j}\omega)$ 为 ω 的复函数，所以有

$$\begin{cases} |H(\mathrm{j}\omega)| = K \\ \varphi(\omega) = -\omega t_0 \end{cases} \tag{6-11}$$

式(6-11)即为系统在频域内无失真传输条件。

系统频域内无失真传输系统的幅频特性和相频特性如图 6.7 所示。

【知识要点提醒】 由此可见，为了实现有限频率成分信号通过线性时不变(LTI)系统的无失真传输，系统的频率响应应满足两个条件。



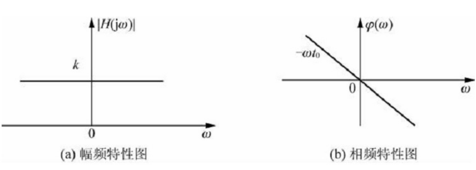


图 6.7　无失真系统的幅频特性和相频特性

(1) 系统传递函数 $H(j\omega)$ 的幅频特性 $|H(j\omega)|$ 对所有有用频率都为常数，即

$$|H(j\omega)|=k$$

(2) 系统传递函数 $H(j\omega)$ 的相频特性 $\varphi(\omega)$ 对所有有用频率呈线性关系，即

$$\varphi(\omega)=-\omega t_0 \quad 或者 \quad \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=-t_0$$

图 6.8 为无失真传输的响应的波形。

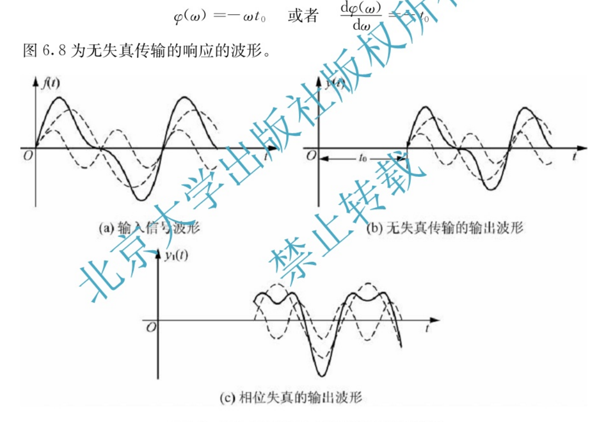


图 6.8　相位失真和无失真传输输出波形比较

【例 6.8】 如图 6.9 所示 RC 电路网络，u_1 是输入电压，u_2 是输出电压，在 $R_1C_1=R_2C_2$ 的条件下，求系统的频率响应特性 $H(j\omega)=\dfrac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$，并判断系统是否为无失真传输系统？

【解题思路与技巧】 检验系统是否为无失真传输系统，首先要求出系统的传输函数 $H(j\omega)$，然后检验是否满足幅频特性和相频特性，即满足 $|H(j\omega)|=k$，$\varphi(\omega)=-\omega t_0$ 条件。

解： 系统函数



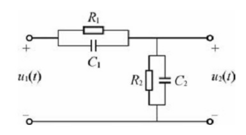


图 6.9　例 6.7 题图

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{U_2(\mathrm{j}\omega)}{U_1(\mathrm{j}\omega)}=\frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

由于 $H(\mathrm{j}\omega)=\frac{R_2}{R_1+R_2}$，$\varphi(\omega)=0$，满足无失真传输的条件，故该 RC 网络是无失真传输系统。

【小思考】 上面电路与纯电阻分压衰减电路有何区别？

【例 6.9】 电路如图 6.10 所示，在电流源 $i(t)$ 激励下，得到输出电压 $u_o(t)$。写出频率特性 $H(\mathrm{j}\omega)=\frac{u_o(t)}{i(t)}$，若使系统能无失真的传输信号，确定 R_1 和 R_2，其中，$L=1\mathrm{H}$，$C=1\mathrm{F}$。传输过程有无时间延迟？

【解题思路与技巧】 利用无失真传输条件 $H(\mathrm{j}\omega)=k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$

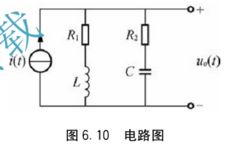


图 6.10　电路图

解： 将上述电路图通过傅里叶变换，列节点电压方程

$$u_o(\mathrm{j}\omega)\left[\frac{1}{R_2+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}+\frac{1}{R_1+\mathrm{j}\omega L}\right]=I(\mathrm{j}\omega)$$

将 $L=1\mathrm{H}$，$C=1\mathrm{F}$ 代入得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{u_o(t)}{i(t)}=\frac{R_1-R_2\omega^2+(1+R_1R_2)\mathrm{j}\omega}{1-\omega^2+(R_1+R_2)\mathrm{j}\omega}$$

若使 $|H(\mathrm{j}\omega)|=K^2$，可令

$$\frac{(R_1-R_2\omega^2)^2+(1+R_1R_2)^2\omega^2}{(1-\omega^2)^2+(R_1+R_2)^2\omega^2}=K^2$$

即

$$\frac{R_1^2-R_2^2\omega^4+(1+R_1^2R_2^2)\omega^2}{1+\omega^4+(R_1^2+R_2^2+2R_1R_2-2)\omega^2}=K^2$$

对于无失真传输，当 $\omega\to 0$，$R_1^2=K^2$，当 $\omega\to\infty$，$R_2^2=K^2$

取 $R_1=1$，$R_2=1$，则

$$K^2=\frac{(R_1-R_2\omega^2)^2+(1+R_1R_2)^2\omega^2}{(1-\omega^2)^2+(R_1+R_2)^2\omega^2}=1$$

故无时间延时。

6.4 理想低通滤波器特性

根据系统的频域分析可知，任何含有一定信息的信号的频谱都占有一定的有限带宽，例如，通过电话传输的语音信号频谱的频率范围是300～3400Hz，而电视传输信号所包含的频率范围自几十赫至几兆赫，由此可见，当这些信号通过线性时不变系统时，由于信号中除了有用的信息外，还包含有多种频率成分，此时系统的响应是系统对所有输入信号频谱的响应。若希望系统只能让其中一部分有用的频率分量信号通过，而使其他频率分量的信号受到抑制，则将系统构成滤波器。

在实际电子系统应用中，按照滤波器允许通过的信号频率划分，可分为低通、高通、带通、带阻等几种，它们的幅频特性分别如图6.11所示。其中，ω_c为低通、高通滤波器的截止角频率，ω_{c1}、ω_{c2}为带通和带阻滤波器的截止角频率。

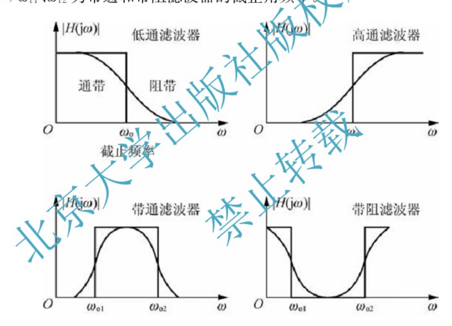


图6.11 滤波器的幅频特性

如果滤波器的幅频特性$|H(j\omega)|$在某一段频带内保持为一常数，而在频带外为零，相频特性$\varphi(\omega)$始终为过原点的一条直线，则这样的滤波器称为理想滤波器。也就是说，对于理想滤波器，可以让允许通过的频率分量百分之百通过，不允许通过的频率分量则百分之百的被抑制掉。

6.4.1 理想低通滤波器及其冲激响应

在各种滤波器中，能将低于截止角频率ω_c的信号无失真的传输，同时能阻止高于截止角频率ω_c的信号通过，则该滤波器称为低通滤波器。低通滤波器尤其是理想低通滤波

器是非常重要的滤波器，它是其他滤波器尤其是数字滤波器设计的基础，其频率响应特性如图 6.12 所示。

【知识要点提醒】 根据频率响应特性，可以写出理想低通滤波器的频响特性（系统函数）$H(\mathrm{j}\omega)$。

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} \tag{6-12}$$

其中

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}1 & -\omega_c<\omega<\omega_c \\ 0 & \omega\text{ 为其他值}\end{cases} \qquad \varphi(\omega)=-t_0\omega$$

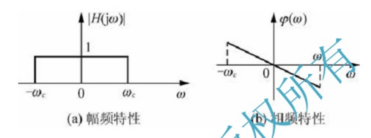


图 6.12　理想低通滤波器频响特性

由低通滤波器的系统传递函数可以看出，只要信号的频率在理想低通滤波器通频带范围内的，都可以无失真的传输。这是理想低通滤波器在频域中的特性。那么，理想低通滤波器在时域中又具有什么特点呢？

为了分析理想低通滤波器的时域特性，将理想低通滤波器的系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$ 进行傅里叶逆变换，不难求得理想低通滤波器的冲激响应 $h(t)$。

$$h(t)=\mathrm{FT}^{-1}[H(\mathrm{j}\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}}{\mathrm{j}(t-t_0)}\bigg|_{-\omega_c}^{+\omega_c}=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(t-t_0)]}{\omega_c(t-t_0)}=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_0)]$$

其波形如图 6.13 所示。

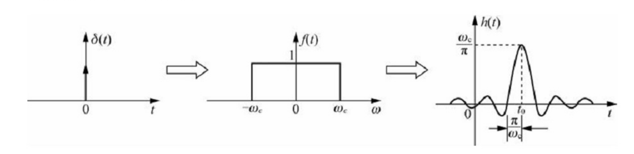


图 6.13　理想低通滤波器的冲激响应

由图 6.13 可以看出，理想低通滤波器的冲激响应与激励信号 $\delta(t)$ 之间产生了失真，这是由于将 $\delta(t)$ 中 $|\omega|>\omega_c$ 的频率分量全部抑制后产生的结果，这种失真为线性失真。

同时，由于冲激信号 $\delta(t)$ 的频带是无限宽的，而理想低通滤波器的带宽是有限的，即 $-\omega_c\sim\omega_c$，将它输入到理想低通滤波器中，因此其冲激响应 $h(t)$ 产生了严重的失真。

另外，冲激响应 $h(t)$ 的峰值比输入信号 $\delta(t)$ 延迟了 t_0，而且冲激信号 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 时刻加入系统，而其冲激响应 $h(t)$ 则在 $t<0$ 的时刻已出现，说明冲激响应在激励加入之前已经存在。对实际的物理系统在未接入激励之前是不可能有响应的。这就是说，理想低通滤波器是一个非因果系统，在实际的电路中是不可能实现的。只有当冲激信号 $\delta(t)$ 通过带宽为 $-\infty\sim\infty$ 的滤波器(即全通滤波器)信号才不会失真。

虽然理想滤波器会对信号产生失真，但这并不会因其无法实现而失去研究价值，在以后的物理可实现的实际的滤波器的设计与分析过程中，都是以理想滤波器作为基础的。

6.4.2 理想低通滤波器及其阶跃响应

前面介绍的是将冲激信号加入到一个理想低通滤波器中，滤波器输出的响应，那么将一个阶跃信号加入到理想低通滤波器中其响应又会是怎样的呢?

设输入信号为阶跃信号 $u(t)$，则由傅里叶变换，阶跃信号的频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$ 为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{FT}[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

而理想低通滤波器的系统传递函数

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} & -\omega_c<\omega<\omega_c\\ 0 & \omega\ \text{为其他值}\end{cases}$$

因此，阶跃响应的频谱

$$G(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)=\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

为得到理想低通的阶跃响应 $g(t)$，对其取傅里叶逆变换

$$\begin{aligned}g(t)&=\mathrm{FT}^{-1}[G(\mathrm{j}\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{\cos[\omega(t-t_0)]}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

式中，被积函数 $\dfrac{\cos[\omega(t-t_0)]}{\mathrm{j}\omega}$ 是 ω 的奇函数，所以在对称区间内的积分为零，被积函数 $\dfrac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega}$ 为 ω 的偶函数，可以得到

$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_c}\frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$\underline{\text{令 } x=\omega(t-t_0)}\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

这里函数 $Si(y)=\int_0^y\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 称为“正弦积分”，已有标准的表格或曲线，以符号 $Si(y)$ 表示

$$Si(y)=\int_0^y\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$



因此，理想低通的阶跃响应为

$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si[\omega_c(t-t_0)]$$

阶跃信号 $u(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$ 的波形如图 6.14 所示。

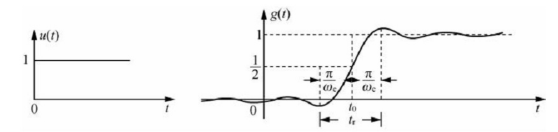


图 6.14　阶跃信号及阶跃响应波形图

由图 6.14 可见，输出响应信号没有阶跃信号陡峭，而是倾斜上升的，并且在阶跃响应建立前后也具有延伸到 ∞ 的振荡。理想低通滤波器的阶跃响应的延迟时间为 t_0。阶跃响应最小值出现在 $t_0-\frac{\pi}{\omega_c}$ 时刻，最大值出现在 $t_0+\frac{\pi}{\omega_c}$ 时刻，阶跃响应从最小值上升到最大值所需时间称为上升时间 $t_r=\frac{2\pi}{\omega_c}$。理想低通滤波器的截止角频率 ω_c 越低，系统响应 $y(t)$ 上升越缓慢，其频带宽度为 $B=\frac{\omega_c}{2\pi}=\frac{1}{t_r}$。

【知识要点提醒】 由此得到一个重要的结论：

理想低通滤波器的阶跃响应的上升时间与截止频率(带宽)成反比 $Bt_r=1$。

【例 6.10】 系统如图 6.15 所示，输入信号 $f_1(t)=\cos t$，$f_2(t)=\cos 10t$，将信号通过如图 6.16 所示的 $H(\mathrm{j}\omega)$ 带通滤波器($\varphi(\omega)=0$)。求系统输出 $y(t)$。

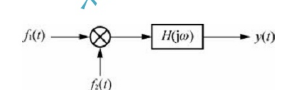


图 6.15　例 6.10 系统框图

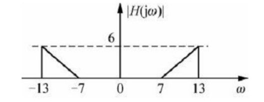


图 6.16　例 6.10 带通滤波器

【解题思路与技巧】 首先确定输入信号的频谱，然后检验能够通过滤波器的频率成分。

解：

$$f_1(t)f_2(t)=\cos t\cdot\cos 10t=\frac{1}{2}(\cos 9t+\cos 11t)$$

滤波器 $H(\mathrm{j}\omega)$ 只能通过 $7<\omega\leqslant 13$ 、无位移(时延)的带通滤波器，即

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\omega-7 & 7<\omega\leqslant 13\\ 0 & 其他\end{cases}$$

特别是

$$H(j9)=2 \quad H(j11)=4$$

所以

$$y(t)=2\cos 11t+\cos 9t$$

【例 6.11】 信号传输系统如图 6.17(a)所示，设 $f(t)$ 为被传输信号，其频谱 $F(j\omega)$ 如图 6.17(b)所示，$p_1(t)$ 为发射端载波信号，$p_2(t)$ 为接收本地振荡信号，其中 $p_1(t)=p_2(t)=\cos(\omega_0 t),\omega_0>>\omega_b$。

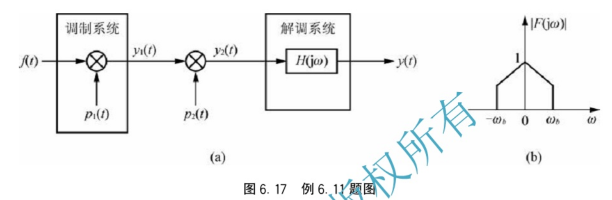


图 6.17 例 6.11 题图

求：(1) $y_1(t)$ 及其频谱 $Y_1(j\omega)$。 (2) $y_2(t)$ 及其频谱 $Y_2(j\omega)$。

(3) 若要求输出 $y(t)=f(t)$，求理想低通滤波器的传递函数 $H(j\omega)$ 并画出波形。

【解题思路与技巧】 本题是以信号发射和接收过程来描述的，由于相乘信号为 $\cos\omega_0 t$，故可以利用频移性质求每一级输出信号的频谱。同时，信号的恢复 $y(t)=f(t)$ 利用理想低通滤波器实现。

解：(1) 由于

$$y_1(t)=f(t)p(t)=f(t)\cos\omega_0 t$$

由傅里叶变换的频移特性

$$Y_1(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*[\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$=\frac{1}{2}F[j(\omega+\omega_0)]+\frac{1}{2}F[j(\omega-\omega_0)]$$

其频谱图如图 6.18 所示。

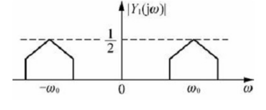


图 6.18 频谱 $Y_1(j\omega)$ 图

(2) 由于

$$y_2(t)=f(t)\cos\omega_0 t\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}f(t)\cos 2\omega_0 t$$

由傅里叶变换的频移特性



$$Y_2(j\omega) = \frac{1}{2}F(j\omega) + \frac{1}{4\pi}F(j\omega) * \{\pi\delta(\omega+2\omega_0) + \pi\delta(\omega-2\omega_0)]$$

$$= \frac{1}{2}F(j\omega) + \frac{1}{4}F[j(\omega+2\omega_0)] + \frac{1}{4}F[j(\omega-2\omega_0)]$$

其频谱包含原信号的全部信息，如图 6.19 所示。

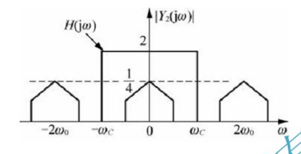


图 6.19　频谱 $Y_2(j\omega)$图

(3) 若要求输出 $y(t)=f(t)$，理想低通滤波器的传递函数 $H(j\omega)$ 如图 6.22 黑线所示，即

$$H(j\omega) = 2G_{2\omega_0}(\omega) \quad \omega_b \leqslant \omega_c \leqslant 2\omega_0 - \omega_b$$

本章知识要点

1. 连续时间系统的频域响应

1) 系统频率响应(传递函数)

$$H(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}$$

$|H(j\omega)|$ 随 ω 变化的特性，称为系统的幅频特性；$\varphi(\omega)$ 随 ω 变化的特性，称为系统的相频特性，总称为系统的频率响应特性。

2) 系统传递函数求法

(1) 利用微分方程求系统函数。

(2) 利用电路频域等效模型求系统函数。

2. 系统的零状态响应

零状态响应

$$Y_{zs}(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) \qquad y_{zs}(t) = FT^{-1}[F(j\omega)H(j\omega)]$$

系统的完全响应为

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

3. 系统的无失真传输

时域无失真传输条件

$$y(t)=kf(t-t_0)$$

频域无失真传输条件

$$\begin{cases}|H(\mathrm{j}\omega)|=K\\ \varphi(\omega)=-\omega t_0\end{cases}$$

4. 理想低通滤波器特性

理想低通滤波器的频响特性(系统函数)，其波形图如图 6.20 所示。

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

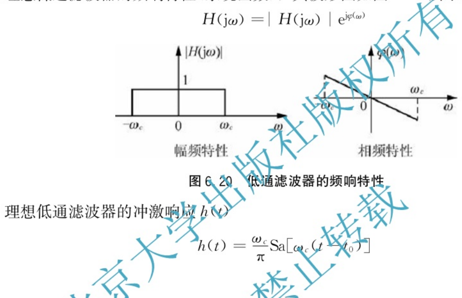


图 6.20 低通滤波器的频响特性

理想低通滤波器的冲激响应 $h(t)$

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_0)]$$

习题 6

6.1 试求图 6.21 所示电路系统的系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{U_o(\mathrm{j}\omega)}{U_i(\mathrm{j}\omega)}$。

6.2 无损 LC 谐振电路如图 6.22 所示，设 $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$，输入信号为电流源 $i(t)$，输出电压 $u(t)$。若 $i(t)\xleftrightarrow{\mathrm{FT}}I(\mathrm{j}\omega)$，$u(t)\xleftrightarrow{\mathrm{FT}}U(\mathrm{j}\omega)$，

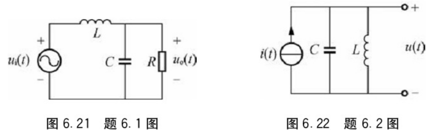


图 6.21 题 6.1 图　　图 6.22 题 6.2 图



求：(1) $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{U(\mathrm{j}\omega)}{I(\mathrm{j}\omega)}$。　　(2) $h(t)$。

6.3　已知描述线性时不变系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$，激励信号 $f(t)=-2\mathrm{e}^{-3t}u(t)$，试求其系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$。

6.4　若连续时间 LTI 系统的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\mathrm{j}\omega-1}{\mathrm{j}\omega+1}$，若输入信号 $f(t)=\sin t$，求系统的输出响应 $y(t)$。

6.5　已知系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega+2}$，激励信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$，试用频域分析法求零状态响应 $y_{zs}(t)$。

6.6　已知激励信号 $f(t)=(3\mathrm{e}^{-t}-2)u(t)$，电路如图 6.23 所示，试求：

(1) 系统的传递函数 $H(\mathrm{j}\omega)$。　　(2) 电容电压的响应 $u_{czs}(t)$。

6.7　已知电路如图 6.24 所示，激励信号 $u_i(t)=(3\mathrm{e}^{-3t}-2)u(t)$。

求电容电压的响应 $u_o(t)$。

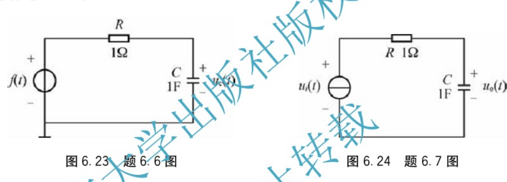


图 6.23　题 6.6 图　　　图 6.24　题 6.7 图

6.8　电路如图 6.25 所示，已知激励信号 $u_s(t)=200+100\sqrt{2}\sin 3\omega t$，$\omega L=\dfrac{10}{3}\Omega$，$\dfrac{1}{\omega C}=60\Omega$，$R=20\Omega$。

求电路的响应 $i(t)$。

6.9　某线性时不变系统的频率响应特性 $H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<6\\ 0 & |\omega|>6\end{cases}$，若输入 $f(t)=\dfrac{\sin 2t}{t}\cos 6t$，求该系统的输出 $y(t)$。

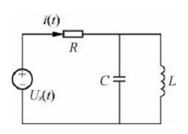


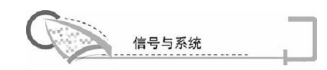
图 6.25　题 6.8 图

6.10　已知描述线性时不变系统的微分方程为 $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=2f(t)$，已知激励 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，初始状态 $y(0_-)=2$，$y'(0_-)=1$。

试求：(1) 系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。(2) 此系统的系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$ 和冲激响应 $h(t)$。

(3) 系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。4)完全响应 $y(t)$。

6.11　系统框图如图 6.26 所示，已知激励 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，初始条件 $y(0_-)=2$，$y'(0_-)=1$。求：



（1）求系统的频域系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$。（2）求零输入响应 $y_{zi}(t)$。

（3）求系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。（4）求系统的全响应 $y(t)$。

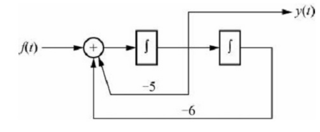


图 6.26　题 6.11 图

6.12　已知连续时间 LTI 系统的冲激响应 $h(t)=\mathrm{Sa}(4\pi t)$，求在输入信号为 $f(t)=\sin 6\pi t+\cos 2\pi t$ 作用下，系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

6.13　若系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega+3}$，激励为周期信号 $f(t)=\sin t+\sin(3t)$，试求响应 $y(t)$，讨论经传输是否引起失真？

6.14　若连续时间 LTI 系统的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1-\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}\omega}$，试求：

（1）系统的阶跃响应 $g(t)$。（2）输入信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$ 时的输出响应 $y(t)$。

6.15　已知滤波器的传输函数如图 6.27(a)所示，若输入信号 $f(t)$ 如图 6.27(b)所示的锯齿波信号，求输出响应 $y(t)$。

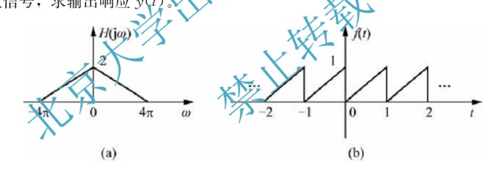


图 6.27　题 6.15 图

6.16　电路如图 6.28 所示，在电流源 $i(t)$ 激励下得到输出电压 $u_o(t)$。写出频率特性 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{u_o(t)}{i(t)}$，若使系统能无失真的传输信号，确定 R_1 和 R_2，其中 $L=1\mathrm{H}$，$C=1\mathrm{F}$。传输过程有无时间延迟？

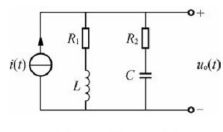


图 6.28　题 6.17 图



6.17　已知理想低通滤波器的频率特性为 $H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$，输入信号为 $f(t)=\dfrac{\sin\alpha t}{\pi t}$。

（1）求当 $\alpha<\omega_c$ 时，滤波器的输出 $y(t)$。（2）求当 $\alpha>\omega_c$ 时，滤波器的输出 $y(t)$。

（3）哪种情况下输出有失真？

6.18　已知如图 6.29 所示的理想低通滤波器系统，激励信号 $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$，其中 $T=10^{-3}\mathrm{s}$，系统函数为 $H(\mathrm{j}\omega)=2[u(\omega+\omega_m)-u(\omega-\omega_m)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$，$\omega_m=10^4\,\mathrm{rad/s}$，求响应 $y(t)$。

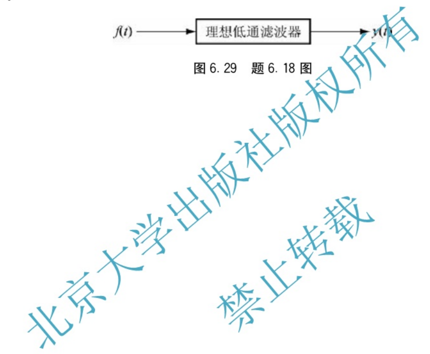


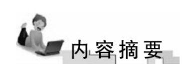
图 6.29　题 6.18 图

第7章

连续时间信号的离散化和采样定理

内容摘要

本章主要介绍将连续时间信号转换成离散时间信号(数字信号)和将离散时间信号(数字信号转换成连续时间信号时所遇到的问题。同时还介绍时域采样及采样定理、频域采样及采样定理以及采样信号的恢复。



教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识	工程应用方向
连续时间信号转换成数字信号的原理	了解从连续时间信号转换成离散时间信号(数字信号)的原理	数字电路中 A/D 转换原理	模拟与数字信号的关系
时域采样定理	熟悉时域采样原理 掌握采样定理 熟悉采样信号的恢复	信号的采样	数字化原理
频域采样	掌握频域采样 掌握频域采样定理	频域采样	信号数字化分析

教学目标与要求

了解连续时间信号转换成离散时间信号(数字信号)的原理。

掌握连续时间信号的时域采样及采样定理。

掌握连续时间信号的频域采样及采样定理。

掌握采样信号的恢复。



7.1　如何将连续时间信号转化为数字信号

在当今实际的信号采集和信号输出控制中，有很多信号仍然采用的是模拟信号，但是，在数据处理、数据传输和数据显示时，大多数都已经采用数字信号，这给人们带来了很多方便。尤其是在信息化的当今世界，随着计算机技术的普及和广泛应用，数字信号在信号的传输、存储和信号处理方面越来越显示出强大的生命力，在电子技术、通信工程、自动控制以及在机械工程等诸多方面到广泛应用。那么，如何将连续时间信号转化为离散时间信号(数字信号)并进行处理、应用的呢？这就涉及连续时间信号的离散化问题，本章主要介绍其转换原理和需要满足的定理。

连续时间信号离散化过程如图 7.1 所示。

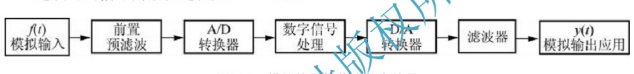


图 7.1　模拟信号转化为数字信号

将一个模拟信号转换成计算机能够接收、发送和处理的数字信号，其转化过程主要有四个步骤：采样、保持、量化和编码。其工作过程如图 7.2 所示。

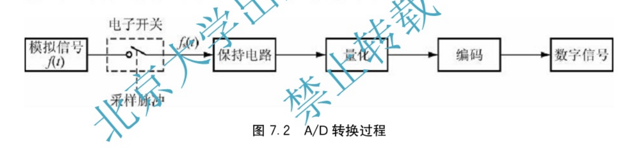


图 7.2　A/D 转换过程

由此可见，在这四个步骤中，首先需要考虑的且最重要的步骤是采样。

所谓采样，就是用一组离散化的样本值表示连续时间信号。现在的问题是，从模拟信号 $f(t)$ 中经采样得到的离散时间样值信号 $f_s(t)$ 是否包含了 $f(t)$ 的全部信息，即能否从离散时间的样值信号 $f_s(t)$ 恢复到原来的模拟信号 $f(t)$？采样定理解决了这一重要问题，下面主要介绍采样定理。

7.2　连续时间信号时域采样

7.2.1　理想采样

一般来说，在没有任何附加条件的情况下，不能指望一个连续时间信号都能唯一地由



一组等间隔的样本值来表征，因为在给定的等间隔时间点上，有无穷多个信号产生一组相同的样本，但是对连续时间频率带宽有限(带限)信号而言，只要取得足够密度的样本值，该信号就可以用其样本值唯一表示，并且能够从这些样本值中恢复原来的信号。

设输入信号为 $f(t)$，用采样脉冲序列 $P_{T_S}(t)$ 通过电子开关对其进行时域采样，经采样器采样后得到的信号为 $f_s(t)$，则采样的工作过程如图 7.3 所示。

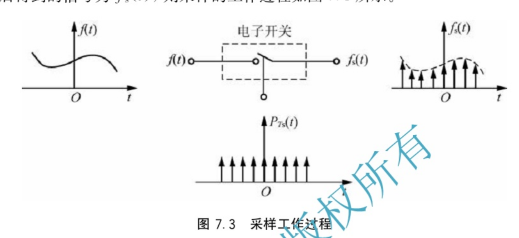


图 7.3　采样工作过程

由图 7.3 可知，样值信号 $f_s(t)$ 是一个脉冲序列，其脉冲幅度值为相应时刻 $f(t)$ 的值，将这种每隔 T_s 采样一次的方式称为均匀采样，T_s 为采样周期，$f_s=\dfrac{1}{T_s}$ 称为采样频率，$\omega_s=2\pi f_s$ 称为采样角频率。

从采样过程可以看出，样值信号 $f_s(t)$ 可以由原信号 $f(t)$ 和一个采样脉冲 $P_{T_s}(t)$ 的乘积来表述，因此样值信号 $f_s(t)$ 的数学表达式可以写成

$$f_s(t)=f(t)\cdot P_{T_s}(t) \tag{7-1}$$

由于样值信号 $f_s(t)$ 在采样以后其幅值随 $f(t)$ 的变化而变化，若采样间隔是均匀的，则该采样称时域均匀采样。

如果采样脉冲为一个冲激序列，得到的样值函数也为一个冲激序列，其各个冲激序列的幅度为该时刻的 $f(t)$ 的瞬时值，这种采样称为理想采样。

下面首先以周期冲激序列采样为例进行分析，即

$$P_{T_s}(t)=\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \tag{7-2}$$

设信号 $f(t)$ 为带限信号，其最高频率分量为 f_m，最高角频率为 $\omega_m=2\pi f_m$，即当 $|\omega|>\omega_m$ 时，$F(j\omega)=0$，根据采样原理，样值信号 $f_s(t)$ 为

$$\begin{aligned} f_s(t) &= f(t)P_{T_s}(t)=f(t)\delta_{T_s}(t)=f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s) \end{aligned} \tag{7-3}$$

由式(7-3)可知，样值信号 $f_s(t)$ 是一个冲激序列，其幅值为各冲激序列时刻对应的 $f(t)$ 的值。

从图 7.3 的时域采样波形可以看出，样值信号 $f_s(t)$ 只是在采样点上满足 $f_s(t)=$



$f(t)$，不在采样点上时，$f_s(t)=0$，那么人们就要考虑这样一个问题：连续时间信号 $f(t)$ 经过时域采样后得到的样值信号 $f_s(t)$ 在时域上波形已经发生了变化，那么它是否会丢失原来信号中的某些信息呢？

下面讨论样值信号 $f_s(t)$ 是否包含了原信号 $f(t)$ 的全部信息。

由于

$$f_s(t)=f(t)P_{T_s}(t)=f(t)\delta_{T_s}(t)$$

对 $f_s(t)$ 求傅里叶变换，根据傅里叶变换频域卷积性质，有

$$F_s(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)*FT[\delta_{T_s}(t)] \tag{7-4}$$

由于周期冲激序列 $\delta_T(t)$ 的频谱函数为

$$\mathrm{FT}[\delta_T(t)]=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s) \tag{7-5}$$

将式(7-5)代入式(7-4)，有

$$F_s(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[F(\mathrm{j}\omega)*\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)\right]=\frac{\omega_s}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[F(\mathrm{j}\omega)*\delta(\omega-n\omega_s)]$$

$$=\frac{\omega_s}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[\mathrm{j}(\omega-n\omega_s)]=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[\mathrm{j}(\omega-n\omega_s)] \tag{7-6}$$

式中，$\omega_s=\dfrac{2\pi}{T_s}$。

【知识要点提醒】 由式(7-6)可以看出，对 $f(t)$ 进行时域采样，虽然 $f(t)$ 与 $f_s(t)$ 在时域波形上是不相同的，但由于信号的信息反映在其频谱上，如果样值信号 $f_s(t)$ 的频谱包含了信号 $f(t)$ 的全部频谱，则两个信号所代表的信息就是相同的。

样值信号 $f_s(t)$ 的频谱函数 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 是 $F(\mathrm{j}\omega)$ 以 ω_s 为周期的重复。波形如图 7.4 所示。

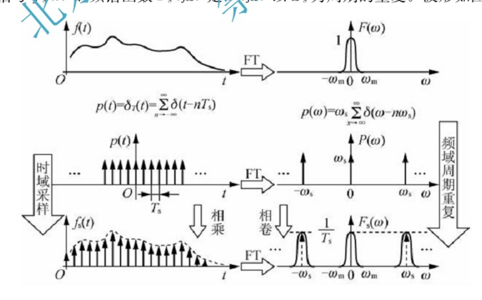


图 7.4 样值信号 $f_s(t)$ 的频谱图

可见，若对 $f(t)$ 进行采样，采样后的样值信号 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 是原信号 $f(t)$ 频

谱 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的周期重复，其频谱 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 的幅值为原信号频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$ 幅值的 $\frac{1}{T_s}$，即样值信号 $f_s(t)$ 包含了原信号 $f(t)$ 的全部信息，若要求样值信号的频谱不失真，则 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 波形不能重叠，即要求 $\omega_s \geqslant 2\omega_m$。由此引出时域采样定理。

【知识要点提醒】 时域采样定理：如果连续时间信号 $f(t)$ 是一个带限信号，且傅里叶变换存在，其最高角频率为 ω_m，即满足 $F(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}F(\mathrm{j}\omega) & |\omega|\leqslant\omega_m\\ 0 & |\omega|>\omega_m\end{cases}$，则信号 $f(t)$ 可以用等间隔的采样值 $f_s(t)$ 唯一表示，而采样频率必须满足 $\omega_s\geqslant 2\omega_m$(或 $f_s\geqslant 2f_m$)，采样间隔满足 $T_s\leqslant\frac{1}{2}T_m$。

采样定理说明：若对一个时域信号 $f(t)$ 进行无失真采样，需要满足在一个周期的间隔内至少采样两次。

通常把最低允许的采样频率 $f_s=2f_m$(或 $\omega_s=2\omega_m$) 称为奈奎斯特(Nyquist)频率，把最大允许的采样间隔 $T_s=\frac{1}{2}T_m$ 称为奈奎斯特间隔。

【小思考】 对于非带限信号，如何进行采样?

由图 7.4 可以看出，只有满足采样定理($\omega_s\geqslant 2\omega_m$)，信号才能无失真采样。如果样值信号的频谱 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 出现混叠现象，通常把这种混叠现象称为欠采样时的混叠现象。当混叠发生时，原始频率 ω_m 就被混叠成一个较低的频率成分 $(\omega_s-\omega_m)$，ω_m 越接近 ω_s，输出频率 $(\omega_s-\omega_m)$ 就越低。当 $\omega_s=\omega_m$ 时，重建信号就是一个直流信号。这相当于一个周期只采样了一次。

在实际应用中，由于信号频谱中含有高频分量成分，若要求满足 $\omega_s\geqslant 2\omega_m$，则需要很高的采样频率，这就给采样信号发生器提出了较高的要求，给信号的采样带来了困难。因此，为了避免产生混叠失真，在理想情况下，在采样之前，滤波器应使低于 $\frac{1}{2}\omega_s$ 的频率分量通过而不产生失真，同时抑制高于 $\frac{1}{2}\omega_s$ 的任何频率分量。这种滤波器能阻止混叠信号的产生，通常称为抗混叠滤波器。为了补偿滤波器的过渡带，一般选择通带包含信号的最高频率，而取样频率 ω_s 的选取应使 $\frac{1}{2}\omega_s$ 落在滤波器的阻带范围内。

【例 7.1】 已知信号 $f(t)$ 的频谱如图 7.5 所示，对信号 $f(t)$ 进行采样，要求采样后信号的频谱分量不丢失，确定其采样最小频率 ω_s 和最大周期 T_s。

【解题思路与技巧】 根据采样定理，首先确定采样信号的最高频率 ω_m 或信号的最小周期 T_m，然后确定采样频率 ω_s 或采样间隔 T_s。

解：由于信号 $f(t)$ 是一个带限信号，其频带范围为 $-4\pi\sim 4\pi$，故信号的最高频率为 4π。



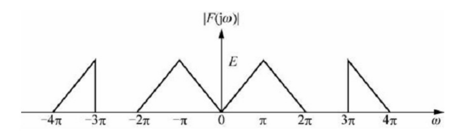


图 7.5　例 7.1 题图

根据采样定理，采样频率满足 $\omega_s \geqslant 2\omega_m$，所以 $\omega_s \geqslant 8\pi$。

由于
$$\frac{2\pi}{8\pi} = T_s$$

故
$$T_s = \frac{1}{4}$$

【例 7.2】 连续时间信号 $f(t) = \cos(2\pi f_0(t) + \varphi)$，式中，$f_0 = 20\text{Hz}$，$\varphi = \frac{\pi}{2}$。

求：(1) $f(t)$ 的周期。

(2) 用采样间隔 $T = 0.02\text{s}$ 对 $f(t)$ 进行采样，写出采样信号 $f_s(t)$ 的表达式。

(3) 画出 $f_s(t)$ 对应的序列 $f(n)$，并求出 $f(n)$ 的周期。

【解题思路与技巧】 根据采样定理，首先确定信号的周期，然后根据采样信号 $f_s(t)$ 的表达式，最后画出波形图。

解：(1) $f(t) = \cos(2\pi f_0(t) + \varphi) = -\sin(2\pi f_0 t)$

$$T = \frac{1}{f_0} = 0.05\text{s}$$

(2) $f_S(t)\big|_{t=nT} = -\sin(2\pi f_0 t)\big|_{t=nT} = -\sin(2\pi \times 20 \times 0.02n) = -\sin(0.8\pi n) = f(n)$

(3) $\omega_0 = 0.8\pi$，$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{5}{2}$，周期 $N = 5$

$f(n)$ 的波形如图 7.6 所示。

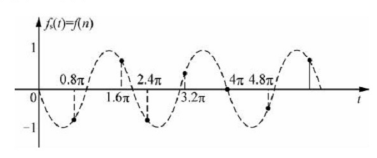


图 7.6　采样信号波形图

【例 7.3】 现有三个余弦信号 $f_1(t) = \cos(2\pi t)$，$f_2(t) = -\cos(6\pi t)$，$f_3(t) = \cos(10\pi t)$，若对其进行理想采样，采样频率为 $\omega_s = 8\pi$。

求：(1) 三个采样输出序列。

(2) 画出信号及采样序列、恢复信号波形并解释混叠现象。

【解题思路与技巧】 根据采样序列表达式 $f_s(t)=f(t)\delta_T(t)$ 写出采样信号，并画出图形。

解： 根据条件可知

$$\omega_s=8\pi \qquad \omega_1=2\pi \qquad \omega_2=6\pi \qquad \omega_3=10\pi$$

由于

$$\omega_s>2\omega_1 \qquad \omega_s<2\omega_2 \qquad \omega_s<2\omega_3$$

因此，只有对 $f_1(t)$ 的采样没有混叠失真。

(1) $f_{s1}(t)=f_1(t)\delta_T(t)=\cos(2\pi t)\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{n}{4}\right)$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(2\pi\frac{n}{4}\right)\delta\left(t-\frac{n}{4}\right)$$

加权序列

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)=[\cdots,\underset{\uparrow}{1},0,-1,0,1,0,-1,\cdots]$$

其中

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$f_1(t)$ 的采样序列 $f_1(t)\delta_T(t)$ 波形如图 7.7 所示。

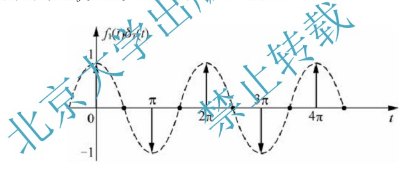


图 7.7 例 7.3 题 $f_1(t)\delta_T(t)$波形图

(2) $f_{s2}(t)=f_2(t)\delta_T(t)=-\cos(6\pi t)\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{n}{4}\right)$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(6\pi\frac{n}{4}\right)\delta\left(t-\frac{n}{4}\right)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(3\pi\frac{n}{2}\right)\delta\left(t-\frac{n}{4}\right)$$

加权序列

$$-\cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)=[\cdots,\underset{\uparrow}{1},0,1,0,1,0,\cdots]$$

其中

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$f_2(t)$ 的采样序列 $f_2(t)\delta_T(t)$ 波形如图 7.8 所示。

由图可知，采样信号的恢复序列比原信号周期大。



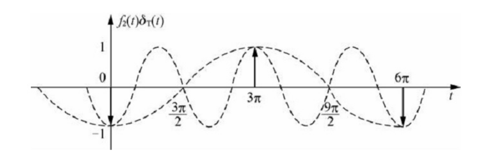


图 7.8　例 7.3 题 $f_2(t)\delta_T(t)$ 波形图

(3) $f_{s3}(t)=f_3(t)\delta_T(t)=\cos(10\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{n}{4}\right)$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(10\pi\,\frac{n}{4}\right)\delta\left(t-\frac{n}{4}\right)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(5\pi\,\frac{n}{2}\right)\delta\left(t-\frac{n}{4}\right)$$

加权序列

$$\cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right)=[\cdots,\underset{\uparrow}{1},0,-1,0,1,0,\cdots]$$

其中

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$f_3(t)$ 的采样序列 $f_3(t)\delta_T(t)$ 波形如图 7.9 所示。

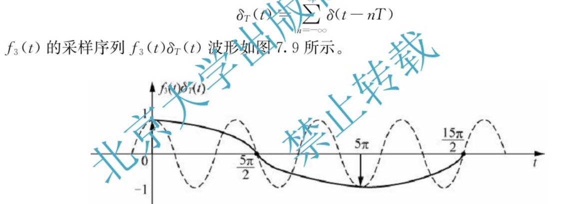


图 7.9　例 7.3 题 $f_3(t)\delta_T(t)$ 波形图

7.2.2　周期矩形脉冲采样

利用周期冲激序列采样是一种理想采样，在实际中理想周期冲激序列根本无法得到，通常得到的都是周期矩形脉冲序列。下面分析周期矩形脉冲序列采样的特点。

设 $f(t)$ 为带限信号，其最高角频率分量为 ω_m，即当 $|\omega|>\omega_m$ 时，$F(j\omega)=0$，采样周期矩形脉冲序列为 $P_{T_s}(t)$，其傅里叶变换为 $P_{T_s}(t)$，设采样为均匀采样，周期为 T_s，则采样频率为 $\omega_s=2\pi f_s=\frac{2\pi}{T_s}$，而矩形脉冲序列 $P_{T_s}(t)$ 的频谱函数为

$$P_{T_s}(t)\xleftrightarrow{\text{FT}}\frac{2\pi E\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_s) \tag{7-7}$$

由于采样脉冲序列的样值信号 $f_s(t)=f(t)P_{T_s}(t)$，根据频域卷积定理可知，时域相乘的傅里叶变换等于它们的频谱在频域里相卷积。

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*P_{T_s}(j\omega) \tag{7-8}$$

把计算出的 $P_{T_s}(t)$ 代入上式可得

$$\begin{aligned}F_s(j\omega)&=\frac{1}{2\pi}[F(j\omega)*P_{T_s}(j\omega)]\\&=\frac{1}{2\pi}[F(j\omega)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi E\tau}{T_s}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_s)]\\&=\frac{E\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)\mathrm{F}[j(\omega-n\omega_s)]\end{aligned} \tag{7-9}$$

周期矩形脉冲序列采样的样值函数 $f_s(t)$ 及其频谱 $F_s(j\omega)$ 如图 7.10 所示。

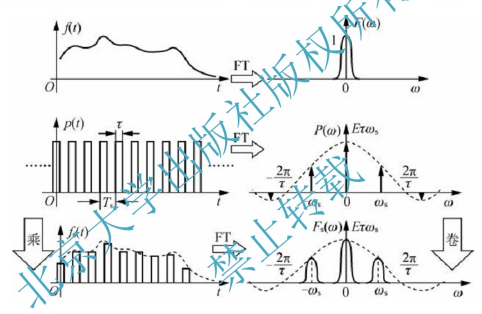


图 7.10　周期矩形脉冲采样

由图 7.10 可以看出：信号在时域被采样后，它的频谱 $F_s(j\omega)$ 是连续信号的频谱 $F(j\omega)$ 以采样频率 ω_s 为间隔周期地重复而得到的。其幅度为采样脉冲序列 $P_{T_s}(t)$ 的傅里叶变换系数的加权，加权系数取决于采样脉冲序列的形状。因此，当采样脉冲序列为矩形脉冲序列时，幅度按 Sa 函数的规律变化。

【知识要点提醒】　$F_s(j\omega)$ 的频谱图如图 7.11 所示，采样后的信号频谱包括有原信号的频谱以及无限个经过平移的原信号的频谱，平移的频率为采样频率及其各次谐波频率，且平移后的频谱幅值随频率而呈 Sa 函数分布。由于矩形脉冲边缘下降很陡，所以其频谱所占的频带几乎是无限宽的。



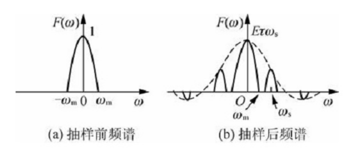


图 7.11　抽样前后信号的频谱图

7.3　信号 $f(t)$的理想重构方法

7.3.1　频域理想重构

一个连续时间信号经过采样等变换后得到数字信号，利用计算机等现代化处理工具，用数字信号处理方法进行计算、变换和处理。但将一个连续时间信号经过离散化后是否还能恢复成原来信号呢？这个恢复原来信号的过程就称为信号的重构。

由采样过程可知，对 $f(t)$ 信号进行均匀采样，在满足采样定理的条件下，得到的样值函数 $f_s(t)$ 中就包含了 $f(t)$ 的全部信息，那么就可以从 $f_s(t)$ 中恢复出 $f(t)$，下面讨论 $f(t)$ 的理想重构。

从图 7.4 可以看出，样值函数 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(j\omega)$ 是原函数 $f(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$ 以 ω_s 为周期的重复，也称为$F(j\omega)$ 的像，重构的目的就是对 $F_s(j\omega)$ 进行某种操作，使它消除这些像并变换为 $F(j\omega)$。那么如何才能完成信号的重构呢？

将样值函数 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(j\omega)$ 经过一个截止频率为 ω_m 的理想低通滤波器(这个过程称为理想重构)，就可以从 $F_s(j\omega)$ 中取出 $F(j\omega)$，从时域上来说就恢复了连续时间信号 $f(t)$。信号 $f(t)$ 的频域重构过程如图 7.12 所示。

【知识要点提醒】 由图可知，信号在频域内重构是将样本信号频谱与理想低通滤波器相乘，输出的就是原来信号的频谱，即

$$F(j\omega) = F_s(j\omega)H(j\omega) \tag{7-10}$$

式中，$H(j\omega)$ 为理想低通滤波器的频谱函数。$H(j\omega)$ 的表达式为

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leqslant \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} \tag{7-11}$$

以上讨论的是用频域的方法恢复 $f(t)$，因此，该方法称为信号 $f(t)$ 的频域理想重构。

【例 7.4】 一个理想采样及恢复系统如图 7.13 所示，采样频率 $\omega_s = 8\pi$，采样后信号经理想低通滤波器 $H(j\omega)$ 还原。

若两个输入信号分别为 $f_1(t) = \cos 2\pi t$，$f_2(t) = \cos 5\pi t$，其中

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\frac{1}{4} & |\omega|<4\pi \\ 0 & |\omega|\geqslant 4\pi\end{cases}$$

求：(1) 问输出信号 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 是否有失真？

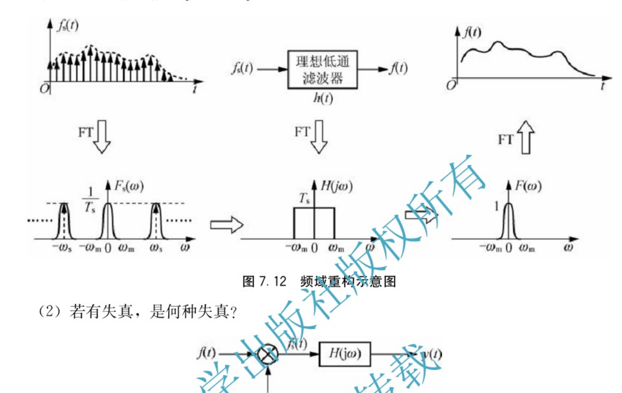


图 7.12　频域重构示意图

(2) 若有失真，是何种失真？

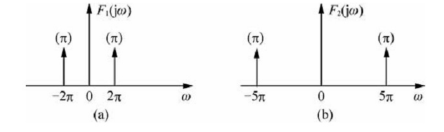


图 7.13　频域重构示意图

【解题思路与技巧】 考察信号经过采样后是否失真主要是看信号的频谱及采样信号的频谱经滤波器滤波后是否出现信号混叠。若出现混叠则会产生失真，否则不会产生失真。

解： 由于 $\omega_s=8\pi$，$f_1(t)=\cos 2\pi t$，$\omega_1=2\pi$，$f_2(t)=\cos 5\pi t$，$\omega_2=5\pi$，故 $F_1(\mathrm{j}\omega)$ 和 $F_2(\mathrm{j}\omega)$ 如图 7.14 所示。

$F_1(j\omega)$
(π) (π)
-2π 0 2π ω
(a)

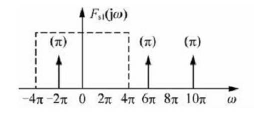
$F_2(j\omega)$
(π) (π)
-5π 0 5π ω
(b)

图 7.14　$F_1(\mathrm{j}\omega)$和 $F_2(\mathrm{j}\omega)$频谱图

由于 $\omega_s>2\omega_1$，$\omega_s<2\omega_2$，因此对 $f_1(t)$ 没有频谱混叠现象，对 $f_2(t)$ 有频谱混叠现象。$F_{s1}(\mathrm{j}\omega)$ 和 $F_{s2}(\mathrm{j}\omega)$ 如图 7.15 所示。

即经滤波后，$y_1(t)=\frac{1}{4}\cos 2\pi t$ 无失真，$y_2(t)=\frac{1}{4}\cos 5\pi t$ 有频率的混叠失真。





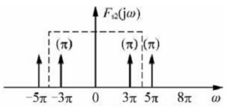


图 7.15 $F_{s1}(j\omega)$和$F_{s2}(j\omega)$频谱图

【例 7.5】 采样系统如图 7.16 所示，$f(t)=A+B\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$，$\delta_T(t)=\sum_{n=\infty}^{\infty}\delta[\delta-n(T+\Delta T)]$，$T\gg\Delta T$，理想低通滤波器传递函数表达式为 $H(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\frac{1}{2(T+\Delta T)}\\ 0 & 其他\end{cases}$

输出信号为 $y(t)=kf(\alpha t)$，其中，$\alpha<1$，k 为实系数。

求：(1) 画出采样信号频谱图。(2) 为实现上述要求，给出 Δ 的取值范围。(3) 求 α，k。

【解题思路与技巧】 该题首先求出采样信号的频谱，再根据采样定理确定采样信号的时间间隔，即可以求出题中所需要的参数。

解：

$$F(j\omega)=2\pi A\delta(\omega)+\pi B\left[\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{T}\right)+\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}\right)\right]$$

$$\Delta T(\omega)=\frac{1}{T+\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left[\omega-n\frac{2\pi}{T+\Delta T}\right]$$

则

$$f(t)\delta_T(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*\Delta_T(j\omega)$$

其波形如图 7.17 所示。

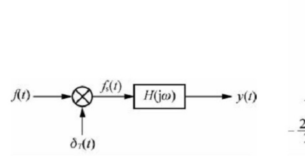


图 7.16 采样系统方框图

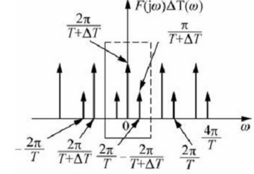


图 7.17 $F(j\omega)\Delta_T(\omega)$波形图

(2) 由 $y(t)=kf(\alpha t)$，可知 $Y(j\omega)=k\frac{1}{|\alpha|}F\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right)$，为实现题中要求，则有

$$\frac{2\pi}{T}=-\frac{2\pi}{T+\Delta T}<\frac{1}{2(T+\Delta T)},\quad 2\pi\Delta T<\frac{T}{2},\ \Delta T<\frac{T}{4\pi}$$

(3) $\alpha<1$，$\alpha=\dfrac{\dfrac{2\pi}{T}-\dfrac{2\pi}{T+\Delta T}}{\dfrac{2\pi}{T}}=\dfrac{\Delta T}{T+\Delta T}$

$$Y(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)*\Delta_T(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{T+\Delta T}\left[F(\mathrm{j}\omega)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-n\frac{2\pi}{T+\Delta T}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{T+\Delta T}\frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)=k\frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

因此

$$k=\frac{1}{T+\Delta T}$$

7.3.2　时域理想重构

7.3.1 节分析了样值函数 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 经过一个截止频率为 ω_m 的理想低通滤波器，就可以取出 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的频域重构方法。下面讨论在时域内如何对信号 $f(t)$ 进行重构。

根据式(7-10)，由傅里叶变换的时域卷积性质可得

$$f(t)=f_s(t)*h(t) \tag{7-12}$$

式中，$f_s(t)$ 为 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 的傅里叶反变换：

$$f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s) \tag{7-13}$$

$h(t)$ 为理想低通滤波器的单位冲激响应，可由求 $H(\mathrm{j}\omega)$ 的傅里叶逆变换得到，即

$$h(t)=\mathrm{FT}[H(\mathrm{j}\omega)] \tag{7-14}$$

$H(\mathrm{j}\omega)$ 为理想低通滤波器的频率特性，是一个幅度为 T_s，宽度为 $2\omega_m$ 的门信号，可表示为

$$H(\mathrm{j}\omega)=T_s g_{2\omega}(\omega) \tag{7-15}$$

应用傅里叶变换的对称性，可以得到

$$h(t)=\frac{T_s\omega_m}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_m t) \tag{7-16}$$

将 $f_s(t)$ 和 $h(t)$ 的表示式代入式(7-12)，从而得到

$$f(t)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)\right]*\frac{T_s\omega_m}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_m t)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{T_s\omega_m}{\pi}f(nT_s)\delta(t-nT_s)]*\mathrm{Sa}(\omega_m t)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{T_s\omega_m}{\pi}f(nT_s)\mathrm{Sa}[\omega_m(t-nT_s)] \tag{7-17}$$

当采样间隔 $T_s=\dfrac{1}{2f_m}$ 时，式(7－17)可写为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\mathrm{Sa}[\omega_m(t-nT_s)] \tag{7-18}$$



式(7-18)表明，连续时间信号 $f(t)$ 的重构可以由无数多个在取样点上 Sa 函数位移的加权和实现，其各个 Sa 函数的加权值为该点的采样值 $f(nT_s)$。因此，只要知道各采样点的样值 $f(nT_s)$，就可唯一的确定出 $f(t)$。这个过程如图 7.18 所示。

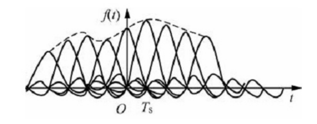


图 7.18　时域重构示意图

【知识要点提醒】　时域理想重构过程通常也称为理想带限插值函数法。该方法适合于带限信号的样本间插值。

在实际应用中，有两种情况不适合插值函数法。

1）非因果系统

非因果系统的输出不仅取决于现在，而且还取决于过去和将来。

2) $h(t)$ 的持续时间为无限长

若 $h(t)$ 的持续时间无限长，就要求每个样本的持续时间也为无限长。

【小思考】　如何进行采样信号的时域重构和频域重构?

7.4　频 域 采 样

7.4.1　频域采样与采样定理

与连续时间对信号的采样相对偶，除了时域采样外，还有频域采样。所谓频域采样是对信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$在频率 ω 轴上每隔 ω_s 取得一个样值，从而得到频域样值函数 $F_s(jn\omega_s)$ 的过程。

【知识要点提醒】　频域采样定理：一个时间有限信号 $f(t)$（即 $|t|< T_m$），其频谱函数 $F(j\omega)$可以由其在均匀频率间 f_s 上的样点值 $F_s(jn\omega_s)$ 唯一确定，只要满足其采样频率满足 $\omega_s\leqslant \frac{1}{2}\omega_m$ 或采样间隔满足 $T_s \geqslant 2T_m$ 即可。

频域采样和原信号的恢复原理如图 7.19 所示。

将信号频谱 $F(j\omega)$ 加到乘法器上与采样频谱 $P(j\omega)$ 相乘，得到频域样本冲激串，该冲激串的强度为原信号频谱对应采样点的幅值。

$$F_s(j\omega) = F(j\omega)P(j\omega) \tag{7-19}$$

其中，$P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_0)$，代入上式，可得

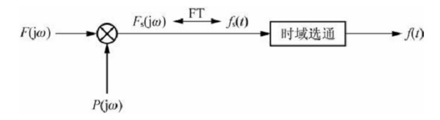


图 7.19　频域采样和恢复原理图

$$F_s(\mathrm{j}\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\delta(\omega-k\omega_s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}k\omega_s)\delta(\omega-k\omega_s) \tag{7-20}$$

由于 $P(\mathrm{j}\omega)$ 是周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 的连续时间周期冲激串 $p(t)$ 的傅里叶变换，根据傅里叶变换对，有

$$p(t)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-m\frac{2\pi}{\omega_0}\right) \tag{7-21}$$

利用时域卷积性质，可以得到样本信号 $f_s(t)$

$$f_s(t)=f(t)*p(t)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{t=-\infty}^{\infty}f\left(t-m\frac{2\pi}{\omega_0}\right) \tag{7-22}$$

频域采样波形如图 7.20 所示。

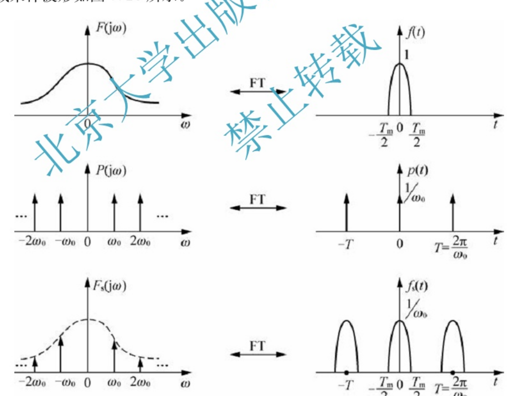


图 7.20　频域采样波形图

由图 7.20 可以看出：对一个时间有限的连续时间信号 $f(t)$，在频域内以等间距 ω_0 对其频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$ 进行采样，则样本信号 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 的傅里叶逆变换 $f_s(t)$ 是一个形状与 $f(t)$ 相



同，幅度为 $f(t)$ 的 $\frac{1}{\omega_0}$，在时域内产生以 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为周期的周期延拓。

若采样信号为矩形脉冲序列，不难推出频域采样为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\omega_m}{\pi}f(nT_s)\mathrm{Sa}[\omega_m(t-nT_s)] \tag{7-23}$$

经变量代换，可得

$$F(\mathrm{j}\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(\mathrm{j}\frac{n\pi}{t_m}\right)\mathrm{Sa}\left[t_m\left(\omega-\frac{n\pi}{t_m}\right)\right] \tag{7-24}$$

【知识要点提醒】 由此可知，频域有限则时域无限，时域有限则频域无限，但反之不一定成立。

7.4.2　信号的恢复

由图 7.19 可以看出：对样本值进行恢复，只需要对频域样本信号进行傅里叶逆变换后再经过一个时域选通电路就可以实现。

时域选通窗 $r_T(t)$ 为矩形窗

$$r_T(t)=\begin{cases}\omega_0 & |t|<T_m\\ 0 & 其他\end{cases} \tag{7-25}$$

信号在时域恢复

$$f(t)=f_s(t)r_T(t)$$

在时域内很容易实现，其硬件实现就是一个脉冲选通电路(或模拟开关)级联一个放大倍数为 ω_0 的放大器。

频域采样恢复波形如图 7.21 所示。

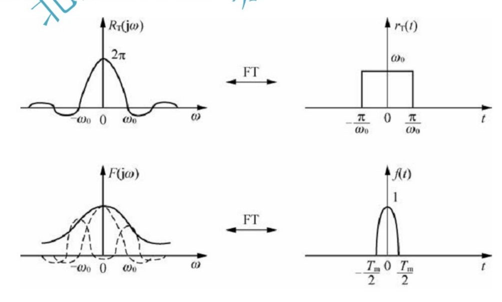


图 7.21　频域采样恢复波形图

频域采样的时域恢复是 $f_s(t)$ 与 $r_T(t)$ 相乘积，在频域恢复时，根据傅里叶变换的时

域乘积性质，有

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}F_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega)*R_T(\mathrm{j}\omega) \tag{7-26}$$

由于

$$R_T(\mathrm{j}\omega)=\omega_0 T\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\omega\right)=2\pi\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\omega\right) \tag{7-27}$$

代入上式，可得

$$\begin{aligned}F(\mathrm{j}\omega)&=\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}k\omega_0)\delta(\omega-k\omega_0)\right]*\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\omega\right)\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}k\omega_0)\mathrm{Sa}\left[\frac{\pi}{\omega_0}(\omega-k\omega_0)\right]\end{aligned} \tag{7-28}$$

式(7-28)表明：在时域上用矩形窗选通恢复原来时限信号的过程，就是在频域上用内插函数 $\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\omega\right)$ 从频域样本值序列内插重建其频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的过程。因此，可以得出时域采样和频域采样及恢复存在对偶关系。

频域采样定理还可以从周期信号的傅里叶变换的角度来分析。

周期信号 $f_{\mathrm{s}}(t)$ 可表示为

$$f_{\mathrm{s}}(t)=\frac{1}{\omega_0}\tilde{f}(t) \tag{7-29}$$

$$\tilde{f}(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(t-mT) \tag{7-30}$$

$f_{\mathrm{s}}(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\omega_0}2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_k\delta(\omega-k\omega_0) \tag{7-31}$$

其中，F_k 为 $\tilde{f}(t)$ 的傅里叶级数系数，它与 $f(t)$ 的傅里叶变换的关系为

$$F_k=\frac{1}{T}F(\mathrm{j}k\omega_0) \tag{7-32}$$

其中，$F(\mathrm{j}k\omega_0)$ 是 $F(\mathrm{j}\omega)$ 以 ω_0 为间隔的样本。

将式(7-32)代入式(7-31)可得

$$F_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}k\omega_{\mathrm{s}})\delta(\omega-k\omega_{\mathrm{s}}) \tag{7-33}$$

与式(7-31)相同。

这表明：频域采样定理与周期信号傅里叶变换和傅里叶级数之间的关系是一致的。频域采样和重建方框图可以等效于图 7.22 所示的时域处理。

从时域上看，频域采样过程就是在时域上把时限信号 $f(t)$ 无重叠的周期延拓，产生周期信号 $f_{\mathrm{s}}(t)$，然后取其一个周期恢复出原信号 $f(t)$ 的过程。

【知识要点提醒】 从时域采样和频域采样过程可以得出如下结论：在时域中对信号进行采样，则必然导致信号在频域中变为周期函数；在频域中对信号进行采样，必然导致信



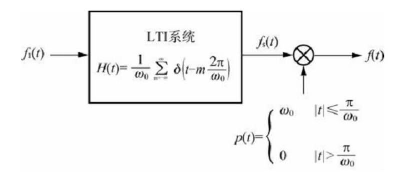


图 7.22　频域采样的时域实现框图

号在时域中变为周期函数。

本章知识要点

1. 连续时间信号时域采样

1） 理想采样

采样脉冲为一个冲激系列，称为理想采样。

时域采样定理：如果连续时间信号 $f(t)$ 是一个带限信号，且傅里叶变换存在，则信号 $f(t)$ 可以用等间隔的采样值 $f_s(t)$ 唯一表示，而采样频率必须满足 $\omega_s \geqslant 2\omega_m$（或 $f_s \geqslant 2f_m$），采样间隔满足 $T_s \leqslant \frac{1}{2}T_m$，即对一个时域信号 $f(t)$ 进行无失真采样，需要满足在一个周期的间隔内至少采样两次。

2） 周期矩形脉冲采样

信号在时域被采样后，它的频谱 $F_s(j\omega)$ 是连续信号的频谱 $F(j\omega)$ 以采样频率 ω_s 为间隔周期地重复而得到的。

2. 信号 $f(t)$的理想重构方法

1） 频域理想重构

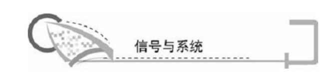
信号在频域内重构是将样本信号频谱与理想低通滤波器相乘，输出就是原来信号的频谱。

$$F(j\omega)=F_s(j\omega)H(j\omega)$$

2） 时域理想重构

只要知道某个采样点的样值 $f(nT_s)$，就可唯一的确定出 $f(t)$。时域理想重构过程通常也称为理想带限插值函数法，即

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\mathrm{Sa}[\omega_m(t-nT_s)]$$



3. 频域采样

1） 频域采样定理

一个时间有限信号 $f(t)$（即 $|t|<T_m$），其频谱函数 $F(j\omega)$ 可以由其在均匀频率间隔 f_s 上的样点值 $F_s(jn\omega_s)$ 唯一确定，只要满足其采样频率满足 $\omega_s \leqslant \frac{1}{2}\omega_m$ 或采样间隔满足 $T_s \geqslant 2T_m$ 即可。

2） 时域采样和频域采样关系

在时域中进行采样，必然导致频域中的周期函数；在频域中进行采样的，必然导致时域中的周期函数。



习题 7

7.1　对下列信号进行时域抽样，确定其最大抽样间隔 T_s 和最小角抽样频率 ω_s。

(1) $f(t) = \cos\pi t + 3\sin 2\pi t + \sin 4\pi t$

(2) $f(t) = \cos 2\pi t \dfrac{\sin\pi t}{\pi t} + 3\sin 6\pi t \dfrac{\sin 2\pi t}{\pi t}$

7.2　对任意信号 $f(t)$，只要其抽样间隔取得足够小，总可以由它在均匀间隔上的抽样值唯一的确定，对 $f(t)$ 无要求。这句话对吗？

7.3　已知 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega| \leqslant 2\text{rad/s} \\ 0 & |\omega| > 2\text{rad/s}\end{cases}$，则对 $f(t)$ 进行均匀抽样的奈奎斯特抽样间隔 T_s 为(　　)。

A. $\dfrac{\pi}{2}$s　　B. $\dfrac{\pi}{4}$s　　C. πs　　D. 2π s

7.4　两个时间信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 相乘，其乘积 $y(t)$ 被一个周期冲激序列 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 采样。其中 $f_1(t)$ 的带宽为 ω_1，$f_2(t)$ 的带宽为 ω_2。若用一个理想低通滤波器 $h(t)$ 从 $y_s(t)$ 中恢复 $y(t)$。求最大采样间隔和采样频率。

7.5　信号 $\text{Sa}(100\pi t)$ 的奈奎斯特速率为

A. $\dfrac{1}{50}$Hz　　B. $\dfrac{1}{100\pi}$Hz　　C. $\dfrac{1}{100}$Hz　　D. $\dfrac{1}{200}$Hz

7.6　确定下列信号的最低抽样频率与奈奎斯特间隔。

(1) $\text{Sa}(100t)$；(2) $\text{Sa}^2(100t)$；(3) $\text{Sa}(100t)+\text{Sa}(50t)$；(4) $\text{Sa}(100t)+\text{Sa}^2(60t)$

7.7　若对信号 $f(t) = \sin\dfrac{10\pi t}{\pi t}$ 离散化处理为 $f(n)$，确定其唯一表示该信号所要求的最大采样间隔 T_s。



7.8　一个采样传输系统如图7.23所示，设输入信号 $f(t)=\dfrac{\sin 100\pi t}{t}$，采样周期 $T_s=0.009\mathrm{s}$，$H(\mathrm{j}\omega)=G_{100\pi}(\omega)$。求输出 $y(t)$。

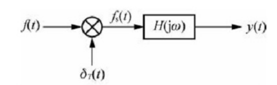


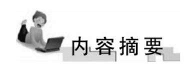
图7.23　题7.8图

7.9　若 $f(t)=\cos\omega_0 t$，$\delta_T(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，其中，$T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$。分别画出以下情况 $f(t)\delta_T(t)$ 的波形及频谱的波形，并讨论能否从采样信号中恢复原信号 $f(t)$。

(1) $\omega_m=\dfrac{\omega_s}{8}=\dfrac{\pi}{4T}$；(2) $\omega_m=\dfrac{\omega_s}{4}=\dfrac{\pi}{2T}$；(3) $\omega_m=\dfrac{\omega_s}{2}=\dfrac{\pi}{T}$；(4) $\omega_m=\dfrac{9\omega_s}{8}=\dfrac{9\pi}{4T}$。

第8章

连续时间信号的拉普拉斯变换



内容摘要

本章主要介绍双边拉普拉斯变换及收敛域、拉普拉斯变换存在的条件、单边拉普拉斯变换、单边拉普拉斯变换的性质和单边拉普拉斯逆变换。

教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识	工程应用方向
连续时间信号双边拉普拉斯变换	了解拉普拉斯变换的引出 掌握双边拉普拉斯 熟悉双边拉普拉斯变换收敛域	傅里叶变换与拉普拉斯变换的关系	系统复频域分析
连续时间信号单边拉普拉斯变换	熟悉单边拉普拉斯变换 掌握单边拉普拉斯变换的性质 熟悉单边拉普拉斯逆变换	单边拉普拉斯变换	系统复频域分析



教学目标与要求

了解连续时间信号拉普拉斯变换的引出。

掌握连续时间信号的双边拉普拉斯变换及收敛域。

掌握拉普拉斯变换存在的条件。

掌握连续时间信号单边拉普拉斯变换及性质。

掌握单边拉普拉斯逆变换。



8.1　双边拉普拉斯变换

信号与系统的频域分析反映了信号与系统内在的频率特性，傅里叶变换的卷积特性又把时域分析的卷积运算转化为频域的乘积运算，从而提供了一种在频域分析、设计系统的新途径。但是并不是所有的信号都能进行傅里叶变换，一般情况下，只有满足收敛条件的信号 $f(t)$ 才能进行傅里叶变换。但对有些信号这个条件是不满足的，因此就不能使用傅里叶变换来分析。对一般连续时间信号和 LTI 系统的描述，通常采用拉普拉斯变换——简称拉氏变换(LT)。拉普拉斯变换能为连续时间 LTI 系统和信号的相互作用提供比傅里叶变换更为广泛的特性描述。例如，对于非绝对可积的信号如冲激信号、阶跃信号、周期信号等都不满足绝对可积的条件，故不能直接求它们的傅里叶变换，也就不存在傅里叶变换，但它可以用拉普拉斯变换来分析。

拉普拉斯变换对分析信号和 LTI 系统来说具有一些明显的特征，这些特征有许多都与傅里叶变换是相似的。

拉普拉斯变换可以分为两类：①双边拉普拉斯变换；②单边拉普拉斯变换。双边拉普拉斯变换为系统特性(如稳定性、因果性及频率响应等)提供了分析方法，而单边拉普拉斯变换则为求解具有初始条件的微分方程提供了方便工具。

8.1.1　从傅里叶变换到拉普拉斯变换

对于不满足傅里叶变换条件的信号，为了能进行傅里叶变换引入一个衰减引子 $\mathrm{e}^{-\sigma t}$，与 $f(t)$ 相乘，只要 σ 的数值选择得当，就能满足当 $t\to\infty$ 时，$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\to 0$，即使 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 收敛，满足傅里叶变换条件。

由傅里叶变换的定义，信号 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换为

$$\mathrm{FT}[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t \tag{8-1}$$

式(8-1)为 $\sigma+\mathrm{j}\omega$ 的函数，可以写成

$$F(\sigma+\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t \tag{8-2}$$

$F(\sigma+\mathrm{j}\omega)$ 的傅里叶反变换为

$$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=\mathrm{FT}^{-1}[F(\sigma+\mathrm{j}\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{8-3}$$

将式(8-3)式两边乘以 $\mathrm{e}^{\sigma t}$，可得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}\omega \tag{8-4}$$

若定义复频率 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$，则 $\mathrm{d}s=\mathrm{j}\mathrm{d}\omega$ 代入式(8-2)、式(8-4)可得

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{8-5}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \tag{8-6}$$

式(8-5)称为双边拉普拉斯变换的正变换式，式(8-6)是拉普拉斯反变换式，其中，e^{st} 称为本征函数。

为书写方便，将拉普拉斯变换表示为 $\mathrm{LT}[f(t)]$ 的形式，而把 $f(t)$ 和 $F(s)$ 间的变换关系记为

$$f(t)\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}F(s) \tag{8-7}$$

当 $s=\mathrm{j}\omega$ 时，式(8-5)就变成

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{8-8}$$

这就是 $f(t)$ 的傅里叶变换，即 $F(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}=F(\mathrm{j}\omega)$

【知识要点提醒】 从式(8-8)可以看出：傅里叶变换是拉普拉斯的一个特殊的情况，傅里叶变换是拉普拉斯变换在 S 域(S 平面)中沿着纵轴(沿 $\mathrm{j}\omega$)的变换。也就是说，如果 $f(t)$ 的傅里叶变换存在，它的拉普拉斯变换不一定存在，反之，如果拉普拉斯变换存在，其傅里叶变换就一定存在。在 $f(t)$ 的傅里叶变换存在的条件下，也可以通过拉普拉斯变换求得傅里叶变换，即 $F(\mathrm{j}\omega)=F(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}$。

【小思考】 能否用 $F(s)=F(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{j}\omega=s}$ 来求解拉普拉斯变换？

8.1.2 双边拉普拉斯变换及其收敛域

对于不存在傅里叶变换的信号 $f(t)$，由于引入了收敛因子 $\mathrm{e}^{-\sigma t}$，使 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 满足傅里叶变换，对其求傅里叶变换，就得到了拉普拉斯变换。也可以说，拉普拉斯变换是 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换。

【知识要点提醒】 因此，拉普拉斯变换收敛的必要条件是 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 绝对可积，可以写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}|\mathrm{d}t<\infty$$

由此可见，拉普拉斯变换扩大了可以进行变换信号的范围。正如傅里叶变换并不是对所有的信号都收敛一样，拉普拉斯变换也可能对某些 σ 的值不收敛，因此，对 σ 的范围必须有一定的选取，不同的选取范围对应着不同的信号。

能使信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在的 σ 取值的范围称为信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换的收敛域，简记为 ROC，一般用 S 平面的阴影部分表示。沿水平轴是 $\mathrm{Re}[s]$ 轴，垂直轴是 $\mathrm{Im}[s]$ 轴，水平轴和垂直轴有时分别称为 σ 轴和 $\mathrm{j}\omega$ 轴。显然，当收敛域包含 $\mathrm{j}\omega$ 轴时，即相当于包含 $s=\mathrm{j}\omega$ 这一虚轴，则信号的傅里叶变换一定存在(收敛)。

下面举例加以说明。

【例 8.1】 设信号 $f_1(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)(\alpha>0)$，$f_2(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(-t)(\alpha>0)$。求 $F_1(s)$，





$F_2(s)$ 及它们的收敛范围。

【解题思路与技巧】 直接代入拉普拉斯变换，该题求解时特别需要注意收敛域的确定。

解： 由拉普拉斯变换的定义式(8-5)可得

$$F_1(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{s+\alpha}$$

由绝对可积条件可得 $\sigma+a>0$

因此 $\mathrm{e}^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+a},\sigma>-\alpha$

同理可得

$$F_2(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}u(-t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(\alpha+\sigma)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{s+\alpha}$$

要使它满足绝对可积条件 $\sigma+a<0$，即

$$-\mathrm{e}^{-at}u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{s+a},\sigma<-\alpha$$

图 8.1 和图 8.2 中的阴影分别表示了 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 的收敛范围。

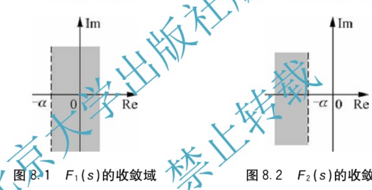


图 8.1 $F_1(s)$的收敛域　　图 8.2 $F_2(s)$的收敛域

从例 8.1 可以看出，两个不同的信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 对应相同的拉普拉斯变换 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$，但它们收敛的取值范围 σ 不同。换句话说，对于相同的拉普拉斯变换，其收敛范围 σ 的取值不同，对应的表达式 $f(t)$ 也不相同。由此可以得出，双边拉普拉斯变换 $F(s)$ 与 $f(t)$ 并不是一一对应的关系，只有当 s 的实部 σ 的取值范围(收敛域)确定后，$F(s)$ 和 $f(t)$ 才具有一一对应的关系。

【例 8.2】 求信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha|t|}$ 的拉普拉斯变换及其收敛域 ($\alpha>0$)。

【解题思路与技巧】 同例 8.1

解： 由拉普拉斯变换的定义式(8-5)有

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha|t|}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{-2\alpha}{s^2-\alpha^2}$$

上式中第一项积分的收敛域为 $\mathrm{Re}[s]<\alpha$，第二项积分的收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>-\alpha$，整个积分的收敛域应该是第一项积分和第二项积分收敛域的公共区域，如图 8.3 所示。

图 8.3 例 8.2 题收敛域

当 $\alpha<0$ 时，因为第一项和第二项积分的收敛域无公共部

分，故 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha|t|}$ 的拉氏变换不存在。以上例子充分说明，并非任何信号都存在拉普拉斯变换，拉普拉斯变换存在着收敛域的问题。

【知识要点提醒】 由以上分析可以看出收敛域具有如下性质。

性质 1 连续时间信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 的收敛域在 S 平面上，由平行于 $\mathrm{j}\omega$ 轴的带状区域构成。

性质 2 对有理拉普拉斯变换来说，在收敛域内不应包含任何极点。

性质 3 如果 $f(t)$ 是时限的，则其拉普拉斯变换 $F(s)$ 的收敛域是整个 S 平面。

性质 4 如果 $f(t)$ 是右边信号，且 $F(s)$ 存在，则 $F(s)$ 收敛域在其最右边极点的右边，如图 8.4 所示。

性质 5 如果 $f(t)$ 是左边信号，且 $F(s)$ 存在，则 $F(s)$ 的收敛域一定在最左边极点的左边，如图 8.5 所示。

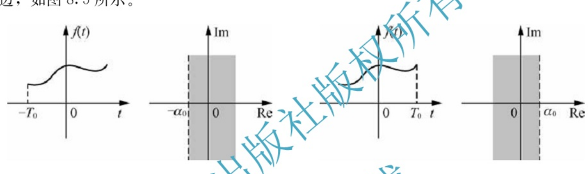


图 8.4 右边信号的收敛域　　图 8.5 左边信号及其收敛域

性质 6 如果 $f(t)$ 是双边信号，且 $F(s)$ 存在，则 $F(s)$ 的收敛域一定是由 S 平面的一条带状域所组成，如图 8.6 所示。

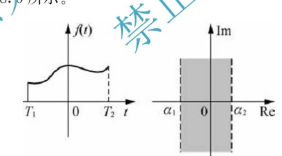


图 8.6 双边信号的收敛域

8.2 单边拉普拉斯变换

8.2.1 单边拉普拉斯变换及其收敛域

在拉普拉斯实际应用中，经常遇到的是因果信号，即当 $t<0$ 时，$f(t)=0$。因此需要





引入另一种拉普拉斯变换形式称为单边拉普拉斯变换。单边拉普拉斯变换在分析具有非零初始条件的(即系统最初不是松弛的)、由线性常系数微分方程所描述的系统中起着重要作用。单边拉普拉斯变换的定义为

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{8-9}$$

式(8-9)中的积分下限为 0_-，它意味着信号 $f(t)$ 在 $t=0$ 时刻可能包含不连续点或冲激信号及其各阶导数。

$f(t)$ 与 $F(s)$ 经常采用一个方便的简化符号表示为

$$f(t)\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}F(s) \tag{8-10}$$

将式(8-9)和式(8-5)比较可以发现，单边和双边拉普拉斯变换在定义上的不同在于积分的下限。双边拉普拉斯变换是从 $t=-\infty$ 到 $t=+\infty$ 的整个区间，而单边拉普拉斯变换仅是从 $t=0_-$ 到 ∞ 的区间。所以，因果信号的双边和单边拉普拉斯变换相等。

由于 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换就是将信号 $f(t)$ 在 $t<0$ 时，让 $f(t)=0$ 所求得的双边拉普拉斯变换，因此，双边拉普拉斯变换从概念和结果基本上都能直接适用于单边的情况。单边拉普拉斯变换的求取和双边拉普拉斯变换也是相同的，只是单边拉普拉斯变换的 ROC 总是在右半平面，为此对单边拉普拉斯变换一般不强调其收敛域。

为了说明单边拉氏变换，考虑下面的例子。

【例 8.3】 比较信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha(t+1)}u(t+1)$ 的双边和单边拉普拉斯变换。

【解题思路与技巧】 直接代入定义求解，特别注意双边拉普拉斯变换和单边拉普拉斯变换的求解区别。

解： 双边拉普拉斯变换为

$$\mathrm{LT}[\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)]=\frac{1}{s+\alpha}\qquad \mathrm{Rs}[s]>-\alpha$$

根据时移性质，其双边拉普拉斯变换为

$$\mathrm{LT}[\mathrm{e}^{-\alpha(t+1)}u(t+1)]=\frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{s+\alpha}\qquad \mathrm{Rs}[s]>-\alpha$$

单边拉普拉斯变换为

$$\mathrm{LT}[\mathrm{e}^{-\alpha(t+1)}u(t+1)]=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha(t+1)}u(t+1)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{-\alpha}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\alpha)t}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{s}}{s+\alpha}\qquad \mathrm{Rs}[s]>-\alpha$$

由此例可知，当 $t<0$ 时，信号 $f(t)$ 不全为零时，它的单边和双边拉普拉斯变换是不同的。

8.2.2　常用信号的单边拉普拉斯变换

根据单边拉普拉斯变换的定义，下面给出几个常用函数的单边拉普拉斯变换，以便以

后在应用中直接使用。

1. 阶跃信号 $u(t)$

$$\mathrm{LT}[u(t)]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s}\qquad \sigma=\mathrm{Rs}[s]>0 \tag{8-11}$$

2. 指数信号 $\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$

$$\mathrm{LT}[\mathrm{e}^{-st}u(t)]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+s)t}}{\alpha+s}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\alpha+s}\qquad \mathrm{Re}[s]>-\alpha \tag{8-12}$$

3. 冲激信号 $\delta(t)$

$$\mathrm{LT}[\delta(t)]=\int_0^\infty \delta(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=1 \tag{8-13}$$

收敛域为整个 S 平面，如果冲激出现在 $t=t_0$ 时刻 $(t_0>0)$，则有

$$\mathrm{LT}[\delta(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-st_0} \tag{8-14}$$

一些常用信号的单边拉普拉斯变换见表 8-1。

表 8-1　常用信号的单边拉普拉斯变换

变换对	信号 $f(t)$	拉普拉斯变换 LT $[f(t)]$	ROC
1	$\delta(t)$	1	全部 s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}[s]>0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}[s]<0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}[s]>0$
5	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}[s]<0$
6	$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}[s]>-\alpha$
7	$-\mathrm{e}^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}[s]<-\alpha$
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}[s]>-\alpha$
9	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}[s]<-\alpha$
10	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	全部 s
11	$[\cos\omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}[s]>0$

续表

变换对	信号 $f(t)$	拉普拉斯变换 LT $[f(t)]$	ROC
12	$[\sin\omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}[s]>0$
13	$[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}[s]>-\alpha$
14	$[e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}[s]>-\alpha$

8.3 单边拉普拉斯变换的特性

与傅里叶变换类似，拉普拉斯变换也有一些特性。本节主要介绍单边拉普拉斯变换特性，双边拉普拉斯变换与单边拉普拉斯变换有许多相同之处，但也有一些区别。

下面介绍单边拉普拉斯变换的特性。

设 $$f(t)\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}F(s) \quad 及 \quad y(t)\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}Y(s)$$

1. 线性特性

若

$$f_1(t)\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}F_1(s) \qquad \mathrm{Re}[s]>R_1$$

$$f_2(t)\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}F_2(s) \qquad \mathrm{Re}[s]>R_2$$

则

$$af_1(t)+bf_2(t)\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}aF_1(s)+bF_2(s) \qquad \mathrm{Re}[s]>R_1\cap R_2 \tag{8-15}$$

式中 a 和 b 为任意常数，收敛域是 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 的重叠部分。但当 $aF_1(s)+bF_2(s)$ 发生零极点相消的情况时，收敛区间可能扩大。特别是当两个信号经过线性运算得到一个时限信号的时候，其收敛区间是整个 s 平面。

下面通过举例说明。

【例 8.4】 已知信号 $f_1(t)=e^{-t}u(t)$，$f_2(t)=e^{2t}u(t)$。

求 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

【解题思路与技巧】 直接利用线性叠加性质求解。

解： 根据题意可知

$$f_1(t)\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}F_1(s)=\frac{1}{s+1} \qquad \mathrm{Re}[s]>-1$$

$$f_2(t)\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}F_2(s)=\frac{1}{s-2} \qquad \mathrm{Re}[s]>2$$

由单边拉普拉斯变换线性性质

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}F_1(s)+F_2(s)=\frac{2s-1}{(s+1)(s-2)}\qquad \text{Re}[s]>2$$

显然收敛区间是参与线性运算的两个信号的 ROC 的公共区域。

【例 8.5】 已知信号 $f_1(t)$ 的单边拉普拉斯变换为 $F_1(s)=\frac{1}{s+1}$，$\text{Re}[s]>-1$，信号 $f_2(t)$ 的单边拉普拉斯变换为 $F_2(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$，$\text{Re}[s]>-1$。

求 $f(t)=f_1(t)-f_2(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

【解题思路与技巧】 直接利用线性叠加性质求解，注意本题中运算前后收敛域发生的变化。

解： 利用单边拉普拉斯变换的线性特性

$$f(t)=f_1(t)-f_2(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}F(s)=F_1(s)-F_2(s)$$

$$=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+2}\qquad \text{Re}[s]>-2$$

显然，由于 $F(s)$ 中零极点相消，故 ROC 比公共区域扩大。

2. 时域平移特性

若

$$f(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}F(s)\qquad \text{Re}[s]>R$$

则

$$f(t-t_0)\xleftrightarrow{\text{LT}}e^{-st_0}F(s),t_0\geqslant 0\qquad \text{Re}[s]>R \tag{8-16}$$

该性质说明：信号在时域的平移相当于拉普拉斯变换乘以复指数系数 e^{-st}。

【例 8.6】 求图 8.7 所示信号的单边拉普拉斯变换。

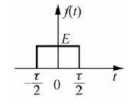


图 8.7 例 8.6 题图

【解题思路与技巧】 首先写出信号 $f(t)$ 的表达式，然后利用时移特性求解。

解：

$$f(t)=E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

由于

$$u(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}\frac{1}{s}$$

$$u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\xleftrightarrow{\text{LT}}\frac{1}{s}e^{-\frac{\tau}{2}s}\qquad u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\xleftrightarrow{\text{LT}}\frac{1}{s}e^{\frac{\tau}{2}s}$$

因此

$$F(s)=\frac{E}{s}\left(e^{\frac{\tau}{2}s}-e^{-\frac{\tau}{2}s}\right)$$

ROC＝整个平面



3. s 域平移特性

若

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} F(s) \qquad \text{ROC}=R$$

则

$$e^{s_0 t}f(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} F(s-s_0) \qquad \text{ROC}=R+\text{Re}[s_0] \tag{8-17}$$

该性质说明：信号在复频域的平移相当于时域乘以复指数函数。

【例 8.7】 求指数衰减正弦函数 $e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

【解题思路与技巧】 直接利用 s 域平移特性求解。

解： 由于

$$\sin(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \qquad \text{Rs}[s]>0$$

故

$$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2} \qquad \text{Re}[s>0+(-\alpha)]=-\alpha$$

4. 尺度变换特性

若

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} F(s) \qquad \text{ROC}=R$$

则

$$f(\alpha t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \qquad \alpha>0,\text{ROC}=R\alpha \tag{8-18}$$

【例 8.8】 已知信号为 $y(t)=f(at-b)u(at-b)$ 且 $a>0,b>0$，求单边拉普拉斯变换 $Y(s)$。

【解题思路与技巧】 直接利用 s 域平移特性和时移特性求解。

解： 由于

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} F(s) \qquad \text{Rs}[s]>\sigma_0$$

根据尺度变换性质，有

$$f(at) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \text{Rs}[s]>a\sigma_0$$

$$y(t)=f\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]u\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]$$

根据时移性质

$$Y(s)=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}} \qquad \text{Re}[s]>a\sigma_0$$

5. 时域微分性质

若

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} F(s) \qquad \text{ROC} = R$$

则

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \xleftrightarrow{\text{LT}} sF(s) - f(0) \tag{8-19}$$

同理可以推广，有

$$\text{LT}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right] = s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$

$$\text{LT}\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0_-) - s^{n-2}f'(0_-) - \cdots - f^{(n-1)}(0_-)$$

式中 $f^{(n)}(t)$ 表示 $f(t)$ 的 n 阶导数，$f(t)$，…，$f^{(n-1)}(0_-)$ 中均指 (0^-) 时刻。

【例 8.9】 求下列信号的单边拉普拉斯变换。

(1) $f_1(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-2t}u(t)]$ (2) $f_2(t) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-2t}\right]u(t)$

【解题思路与技巧】 在利用时域微分特性时是对整个信号的微分，$f_1(t)$ 可直接利用，而 $f_2(t)$ 是对信号的一部分微分，因此，不能直接利用求解。

解：(1) 求 $f_1(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

方法 1：由于

$$f_1(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-2t}u(t)] = \delta(t) - 2\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

根据线性性质

$$F_1(s) = 1 - \frac{2}{s+2} = \frac{s}{s+2}$$

方法 2：

由时域微分性质

$$F_1(s) = \text{LT}[\mathrm{e}^{-2t}u(t)] - \mathrm{e}^{-2t}u(t)\big|_{t=0_-} = \frac{s}{s+2}$$

(2) 求 $f_2(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

由于

$$f_2(t) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-2t}\right]u(t) = -2\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

因此可得

$$F_2(s) = -\frac{2}{s+2}$$

6. 时域积分性质

若

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} F(s) \qquad \text{ROC} = R$$

则





$$f^{(-1)}(t)=\int_{0_-}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0_-) \tag{8-20}$$

推广

$$f^{(-n)}(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{s^n}F(s)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{s^{n-m+1}}f^{(-m)}(0_-)$$

式中 $f^{(-1)}(0_-)$ 为信号 $f(t)$ 的积分在 $t\to 0_-$ 点的值，即信号 $f(t)$ 的面积在 $t\to 0_-$ 点的值。

【例 8.10】 已知信号 $f(t)$ 的波形如图 8.8(a)所示，求 $f(t)$ 单边拉普拉斯变换。

【解题思路与技巧】 由于该题要求解的是单边拉普拉斯变换，因此有 $f(t)=f(t)u(t)$，若是双边拉普拉斯变换，上式关系不成立，故该题可以直接求 $f(t)u(t)$ 的单边拉普拉斯变换，也可以利用时域积分特性求解。

解：由于要求单边拉普拉斯变换，故 $\text{LT}[f(t)]=\text{LT}[f(t)u(t)]$，如图 8.8(b)所示。

方法 1：根据单边拉普拉斯变换定义

$$F(s)=\text{LT}[f(t)]=\text{LT}[f(t)u(t)]=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}$$

方法 2：由于

$$f(t)=-u(-t)+u(t)-u(t-1)$$

故

$$f(0_-)=-1 \qquad f'(t)=2\delta(t)-\delta(t-1)$$

$f'(t)$ 如图 8.8(c)所示。$f'(t)$ 的单边拉普拉斯变换

$$F_1(s)=\text{LT}[f'(t)]=2-\mathrm{e}^{-s} \qquad \text{Re}[s]>-\infty$$

根据时域积分性质，有

$$F(s)=\text{LT}[f(t)]=\frac{f(0_-)}{s}+\frac{F_1(s)}{s}=-\frac{1}{s}+\frac{2-\mathrm{e}^{-s}}{s}=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}$$

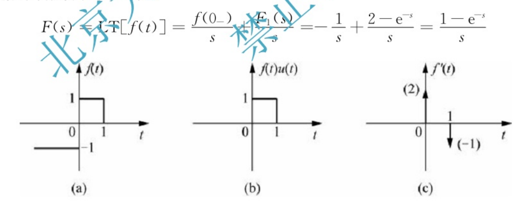


图 8.8　例 8.10 题图

7. 时域卷积特性

若

$$f_2(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} F_2(s) \qquad \text{ROC}=R_2$$

则

$$f_1(t)*f_2(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} F_1(s)F_2(s) \qquad \text{ROC}=R_1\cap R_2 \tag{8-21}$$

该性质说明：两信号在时域内的卷积在频域内表现为乘积。时域卷积性质经常用来求

解线性时不变系统的零状态响应。

【例 8.11】 已知信号 $f_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$，$f_2(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

求信号 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$。

【解题思路与技巧】 直接利用时域卷积特性求解。

解： 由单边拉普拉斯变换，有

$$F_1(s)=\frac{1}{s+2}\qquad F_2(s)=\frac{1}{s}$$

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

由时域卷积性质

$$F(s)=F_1(s)F_2(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}$$

$$f(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

8. 相乘特性

若

$$f_1(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}F_1(s)\qquad \mathrm{Re}[s]>\sigma_1$$

$$f_2(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}F_2(s)\qquad \mathrm{Re}[s]>\sigma_2$$

则

$$f_1(t)f_2(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}F_1(s)*F_2(s)\qquad \mathrm{Re}[s]>\sigma_1+\sigma_2 \tag{8-22}$$

这个性质说明：两个信号在时域的乘积在频域内等于两个信号各自拉普拉斯变换的卷积再乘以 $\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}$。

9. 复频域微分特性

若

$$f(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}F(s)\qquad \mathrm{Re}[s]>\sigma$$

则

$$-tf(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}\qquad \mathrm{Re}[s]>\sigma \tag{8-23}$$

【知识要点提醒】 该性质主要用在求解 $tf(t),t^2f(t),\cdots$ 这些类型信号的拉普拉斯变换，可以为求解带来很大的方便。

【例 8.12】 已知 $\mathrm{LT}[u(t)]\xleftrightarrow{\text{LT}}\frac{1}{s}\qquad \mathrm{Re}[s]>0$，

求

$$\mathrm{LT}[tu(t)],\mathrm{LT}[t^2u(t)],\mathrm{LT}\{t^nu(t)],\mathrm{LT}[t^n\mathrm{e}^{-\lambda t}u(t)]$$

【解题思路与技巧】 直接利用复频域微分特性求解。



解：利用复频域微分特性可知

$$\mathrm{LT}[tu(t)]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s^2}\qquad \mathrm{Re}[s]>0$$

$$\mathrm{LT}[t^2u(t)]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s^2}\right)=\frac{2}{s^3}\qquad \mathrm{Re}[s]>0$$

依此类推，可得

$$\mathrm{LT}\{t^nu(t)]=\frac{n!}{s^{n+1}}\qquad \mathrm{Re}[s]>0$$

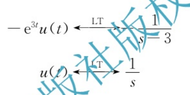
再由 s 域平移(指数加权)性质得

$$\mathrm{LT}[t^n\mathrm{e}^{-\lambda t}u(t)]=\frac{n!}{(s+\lambda)^{n+1}}\qquad \mathrm{Re}[s]>-\lambda$$

【例 8.13】 求 $f(t)=[-\mathrm{e}^{3t}u(t)]*[tu(t)]$ 的单边拉普拉斯变换。

【解题思路与技巧】 利用 $\boldsymbol{S}$ 域平移、复频域微分和时域卷积特性直接求解。

解：由于



$$-\mathrm{e}^{3t}u(t)\overset{\mathrm{LT}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{s-3}$$

$$u(t)\overset{\mathrm{LT}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{s}$$

由复频域微分性质，可得

$$tu(t)\overset{\mathrm{LT}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{s^2}$$

由时域卷积性质，可得

$$F(s)=\mathrm{LT}\{[-\mathrm{e}^{3t}u(t)]*[tu(t)]\}=-\frac{1}{s^2(s-3)}$$

10. *初值定理与终值定理*

1) 初值定理

若 $t<0, f(t)=0$，且在 $t=0$ 时，$f(t)$ 不包含冲激函数 $\delta(t)$ 及其各阶导数，则有

$$f(0_+)=\lim_{t\to 0_+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)\tag{8-24}$$

2) 终值定理

若 $f(t)$ 在 $t\to\infty$ 时 $f(\infty)$ 存在，则有

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)\tag{8-25}$$

【例 8.14】 已知 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\cos t\cdot u(t)$，求 $f(t)$ 的初值 $f(0^+)$ 和终值 $f(\infty)$。

【解题思路与技巧】 直接代入初值定理和终值定理。

解：由于

$$F(s)=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

由初值定理，有

$$f(0_+)=\lim_{t\to 0_+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}s\frac{s+1}{(s+1)^2+1}=1$$

由终值定理，有

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{s+1}{(s+1)^2+1}=0$$

【例 8.15】 求图 8.9 所示信号的拉普拉斯变换。

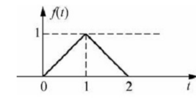


图 8.9　例 8.15 题图

【解题思路与技巧】 本题可以用多种方法求解，既可以采用定义求解，也可以采用拉普拉斯变换的时域微分特性、时域卷积特性或将信号分解为基本信号组合求解。

解：方法 1：用定义求解

写出信号的表达式

$$f(t)=\begin{cases}t & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 2-t & 1\leqslant t\leqslant 2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^1 te^{-st}\,dt+\int_1^2(2-t)e^{-st}\,dt=\int_0^1 te^{-st}\,dt+\int_1^2 2e^{-st}\,dt-\int_1^2 te^{-st}\,dt\\&=F_1(s)+F_2(s)-F_3(s)\end{aligned}$$

$$F_1(s)=\int_0^1 te^{-st}\,dt=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s^2}e^{-s}$$

$$F_2(s)=\int_1^2 2e^{-st}\,dt=-\frac{2}{s}e^{-2s}+\frac{2}{s}e^{-s}$$

$$F_3(s)=\int_1^2 te^{-st}\,dt=-\frac{2}{s}e^{-2s}-\frac{1}{s^2}e^{-2s}+\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s^2}e^{-s}$$

$$\begin{aligned}F(s)&=F_1(s)+F_2(s)-F_3(s)\\&=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{2}{s}e^{-2s}+\frac{2}{s}e^{-s}+\frac{2}{s}e^{-2s}+\frac{1}{s^2}e^{-2s}-\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s^2}e^{-s}\\&=\frac{1}{s^2}[1-se^{-s}-e^{-s}-2se^{-2s}+2se^{-s}+2se^{-2s}+e^{-2s}-se^{-s}-e^{-s}]\\&=\frac{1}{s^2}[1-2e^{-s}+e^{-2s}]=\frac{1}{s}(1-e^{-s})^2\end{aligned}$$

方法 2：信号分解方法

三角波信号可以分解为两个门信号的卷积，即

$$f(t)=f_1(t)*f_1(t)$$

其中 $f_1(t)=u(t)-u(t-1)$，则有

$$F_1(s)=\frac{1}{s}(1-e^{-s})$$



根据时域卷积特性

$$F(s)=F_1(s)\cdot F_1(s)=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})^2$$

方法 3：利用时域微分特性

对 $f(t)$ 求两次微分，令

$$g(t)=f'(t)\qquad y(t)=f''(t)$$

如图 8.10 所示。

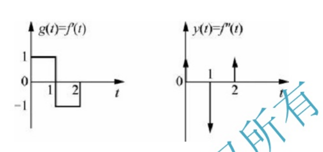


图 8.10　f′(t)和 f″(t)波形图

$$g(t)=f'(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$$

$$y(t)=f''(t)=\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)$$

$$Y(s)=1-2e^{-s}+e^{-2s}=(1-e^{-s})^2$$

由图可知

$$g(0_-)=0\qquad f(0_-)=0$$

故有

$$G(s)=\frac{Y(s)}{s}-\frac{g(0_-)}{s}=\frac{1}{s}(1-e^{-s})^2$$

同样有

$$F(s)=\frac{G(s)}{s}-\frac{f(0_-)}{s}=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})^2$$

【例 8.16】 求下列信号单边拉氏变换。

(1) $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(t-n)$　　(2) $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-t}(-1)^n u(t-n)$

【解题思路与技巧】 无穷阶跃函数级数求解拉普拉斯变换可利用时移特性，最后转换为等比级数求和问题，注意收敛条件。

解：(1) $u(t)\overset{LT}{\longleftrightarrow}\frac{1}{s}$　　$u(t-n)\overset{LT}{\longleftrightarrow}\frac{1}{s}e^{-ns}$ 则

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{e^{-ns}}{s}=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-s}\right)^n=\frac{1}{s\left(1-\frac{1}{2}e^{-s}\right)}=\frac{2}{s(2-e^{-s})}$$

收敛条件 $\left|\frac{1}{2}e^{-s}\right|<1$，相应的收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>-\ln 2$。

(2) $e^{-t}u(t)\overset{LT}{\longleftrightarrow}\frac{1}{s+1}$　　$e^{-n}e^{-t+n}u(t-n)\overset{LT}{\longleftrightarrow}e^{-n}\frac{1}{s+1}e^{-ns}$

则

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{e^{-n(s+1)}}{s+1}=\frac{1}{s+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-e^{-(s+1)})^{n}=\frac{1}{(s+1)(1+e^{-(s+1)})}$$

收敛条件 $|-e^{-(s+1)}|<1$，相应的收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>-1$。

为了查找方便，将单边拉普拉斯性质列于表 8-2 中。

表 8-2　单边拉普拉斯变换性质

性质名称	时域	复频域(s 域)	收敛域
线性	$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF_1(s)+bF_2(s)$	至少包含 $R_1\cap R_2$
尺度变换	$f(at),a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$\mathrm{Re}[s]>a\cdot R$
时移	$f(t-t_0)u(t-t_0),t_0>0$	$e^{-st_0}F(s)$	$\mathrm{ROC}=R$
S 域平移	$e^{s_0t}f(t)$	$F(s-s_0)$	$R+\mathrm{Re}[s_0]$
卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$	至少包含 $R_1\cap R_2$
相乘	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s)$	$\mathrm{Re}[s]>\sigma_1+\sigma_2$
S 域微分	$-tf(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$	$\mathrm{ROC}=R$
微分	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0_-)$	$\mathrm{ROC}=R$
	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$	$\mathrm{ROC}=R$
积分	$\int_{0_-}^{t}f(\tau)d\tau$ $\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$ $\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$	包含 $R\cap\{\mathrm{Re}[s]>,0\}$
初值	$f(0_+)$	$\lim\limits_{t\to\infty}sF(s)$	
终值	$f(\infty)$	$\lim\limits_{t\to 0}sF(s)$	

8.4　周期信号的拉普拉斯变换

与傅里叶变换相同，拉普拉斯变换是针对非周期信号而言的，对周期信号不满足拉普拉斯变换存在的条件，但引入冲激信号和根据信号的分解后，可以求得周期信号的拉普拉斯变换。

下面举例说明。

【例 8.17】 求 $t=0$ 接入的周期冲激信号的单边拉普拉斯变换。

【解题思路与技巧】　写出冲激序列的表达式，利用时移特性求拉普拉斯变换。

解： 周期冲激信号波形如图 8.11 所示。

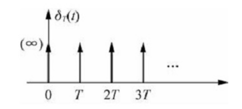


图 8.11　例 8.17 题波形图

$$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$$

求其单边拉普拉斯变换

$$\Delta_T(s)=\mathrm{LT}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)\right]=\mathrm{LT}[\delta(t)+\delta(t-T)+\delta(t-2T)+\cdots]$$

$$=1+\mathrm{e}^{-st}+\mathrm{e}^{-2st}+\cdots=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-st}} \tag{8-26}$$

【知识要点提醒】　通过此例，可以推广到对一般周期信号进行单边拉普拉斯变换的求解。由信号的时域分解可知，任何一个周期信号 $f_T(t)$ 都可以分解为一个非周期信号 $f(t)$ 与一个周期冲激信号 $\delta_T(t)$ 的卷积，再借助于单边拉普拉斯变换的卷积特性，不难得到一般周期信号的单边拉普拉斯变换。

【例 8.18】　求周期矩形脉冲信号的单边拉普拉斯变换。

【解题思路与技巧】　利用周期信号为一个非周期信号与冲激序列的卷积求周期信号的拉普拉斯变换。本题重要的是该结论可以用来求任意周期信号的拉普拉斯变换。

解： 周期矩形脉冲信号及分解如图 8.12 所示。

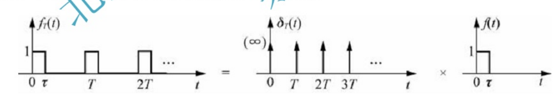


图 8.12　周期矩形脉冲信号及分解图

周期信号 $f_T(t)$ 可以看作单周期信号 $f(t)$ 和周期冲激信号 $\delta_T(t)$ 的卷积。

$$f_T(t)=f(t)*\delta_T(t)=f(t)*\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$$

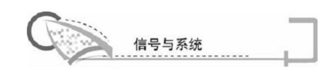
由拉普拉斯变换的时域卷积性质，可得周期信号的拉普拉斯变换计算公式

$$F_T(s)=F(s)\Delta_T(s)=F(s)\,\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}} \tag{8-27}$$

其中 $F_0(s)$ 为周期信号第一个周期的拉普拉斯变换。

【例 8.19】　求图 8.13 周期信号的单边拉普拉斯变换。

【解题思路与技巧】　该题可以看成两个信号相乘，即 $f(t)=f_1(t)\mathrm{e}^{-t}$，利用拉普拉斯



变换的频移特性，$f_1(t)$ 可以直接利用任意周期信号的拉普拉斯变换求解方法计算。

解： 信号

$$f(t)=f_1(t)\mathrm{e}^{-t}$$

而 $f_1(t)$ 是一个周期为 $T=2$ 的单边信号，波形图如图 8.14 所示。

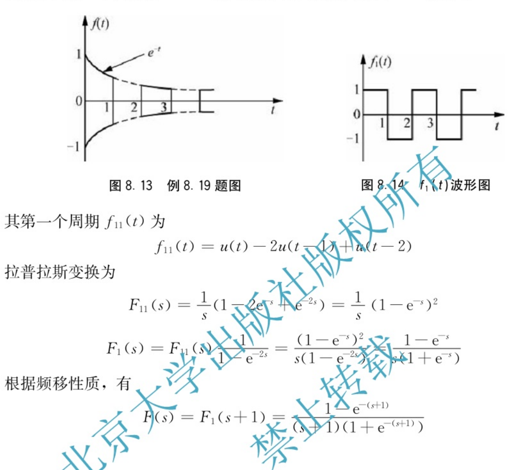


图 8.13　例 8.19 题图　　　　图 8.14　$f_1(t)$ 波形图

其第一个周期 $f_{11}(t)$ 为

$$f_{11}(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$$

拉普拉斯变换为

$$F_{11}(s)=\frac{1}{s}(1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s})=\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-s})^2$$

$$F_1(s)=F_{11}(s)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2s}}=\frac{(1-\mathrm{e}^{-s})^2}{s(1-\mathrm{e}^{-2s})}=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s(1+\mathrm{e}^{-s})}$$

根据频移性质，有

$$F(s)=F_1(s+1)=\frac{1-\mathrm{e}^{-(s+1)}}{(s+1)(1+\mathrm{e}^{-(s+1)})}$$

8.5　拉普拉斯逆变换

在信号与系统分析中，根据分析的内容和特点，不但需要从时域的角度来分析，有时还需要从复频域的范围内分析，对同一个信号与系统，无论从哪个角度分析，其结果都是相同的，这就要求将信号与系统既能从时域转换到复频域——拉普拉斯变换，又能从复频域转换到时域——拉普拉斯逆变换。

下面主要介绍常见单边拉普拉斯逆变换的求解方法，与双边拉普拉斯逆变换的求解方法类似。

8.5.1　部分分式展开法

在研究以线性常系数微分方程描述的系统时，一般将信号表示为 s 的有理式，$F(s)$ 通常表示为



$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_{\mathrm{m}}s^m}{a_0+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ns^n} \tag{8-28}$$

式中，系数 a_i 和 b_i 都是实数，m 和 n 是正整数。

为了分析方便，将 $F(s)$ 的分母多项式 $B(s)$ 和分子 $A(s)$ 分别进行因式分解，表示为

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_{\mathrm{m}}(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_{\mathrm{m}})}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \tag{8-29}$$

式中 $A(s)$ 称为特征多项式，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 称为 $F(s)$ 的“极点”，它们是特征方程 $A(s)=0$ 的根，也称为特征根或固有频率。$z_1,z_2,\cdots,z_{\mathrm{m}}$ 称为 $F(s)$ 的“零点”，它们是方程 $B(s)=0$ 的根。

根据极点(特征根)的特点不同，有以下几种情况。

1. 当极点为实根，且无重根时

(1) 当 $F(s)$ 为有理真分式($m<n$)，则 $F(s)$ 可以分解为

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}\\&=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}\end{aligned} \tag{8-30}$$

【知识要点提醒】 式中 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$分别为各分式的系数，通过下面的方法计算得到

$$k_i=F(s)(s-p_i)|_{s=p_i} \tag{8-31}$$

通过查表 8-1 可得 $F(s)$ 的逆变换 $f(t)$。

如果信号为因果信号，其逆变换为

$$f(t)=(k_1e^{p_1t}+k_2e^{p_2t}+\cdots+k_ne^{p_nt})u(t)$$

(2) 如果 $F(s)$ 为有理假分式($m\geqslant n$)，此时先将 $F(s)$ 用长除法化为 s 的多项式与有理真分式两部分

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=B_0+B_1s+\cdots+B_{m-n}s^{m-n}+\frac{B_1(s)}{A(s)} \tag{8-32}$$

式中 $\frac{B_1(s)}{A(s)}$ 为真分式，按照上面的解法展开求解。

多项式部分对应拉普拉斯逆变换的冲激函数及其高阶导数，即

$$\begin{aligned}B_0&\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}B_0\delta(t)\\B_1&\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}B_1\delta'(t)\\&\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\B_{m-n}s^{m-n}&\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}B_{m-n}\delta^{(m-n)}(t)\end{aligned} \tag{8-33}$$

下面举例说明。

【例 8.20】 利用部分分式展开法求 $F(s)$ 的单边拉普拉斯逆变换。

$$F(s)=\frac{2s^3-9s^2+4s+10}{s^2-3s-4}$$



【解题思路与技巧】 利用部分分式展开方法求拉普拉斯逆变换，注意该题 $F(s)$ 为假分式，要用长除法化成真分式与多项式之和。

解： 由于 $F(s)$ 的表达式为有理假分式，故需要用长除法化成有理真分式

$$F(s)=2s-3+\frac{3s-2}{s^2-3s-4}$$

用部分分式法将 $F(s)$ 展开成有理函数展开式

$$F(s)=2s-3+\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s-4}$$

查表 8 - 1 及式(8-33)有

$$2s\overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow}2\delta'(t)\qquad 3\overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow}3\delta(t)$$

$$\frac{1}{s+1}\overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow}\mathrm{e}^{-t}u(t)\qquad \frac{2}{s-4}\overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow}2\mathrm{e}^{4t}u(t)$$

综合以上结果，可得

$$f(t)=2\delta'(t)-3\delta(t)+\mathrm{e}^{-t}u(t)+2\mathrm{e}^{4t}u(t)$$

2. 当极点为实数，且有重根时

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{(s-p_1)^rA_2(s)}=\frac{B_1(s)}{(s-p_1)^r}+\frac{B_2(s)}{A_2(s)}=F_1(s)+F_2(s)\tag{8-34}$$

式中，$F_1(s)=\dfrac{B_1(s)}{(s-p_1)^r}$ 为在 $s=p_1$ 处有 r 重根，即 p_1 为 $F(s)$ 的 r 阶极点。$F_2(s)=\dfrac{B_2(s)}{A_2(s)}$ 为无重根的有理分式，其逆变换的求解方法与前面无重根的方法相同。

$F_1(s)$ 展开为

$$F_1(s)=\frac{k_{11}}{(s-p_1)^r}+\frac{k_{12}}{(s-p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{k_{1r}}{(s-p_1)}\tag{8-35}$$

【知识要点提醒】 重根所对应的系数 k_{1i} 可以采用下述方法计算得到。

$$k_{11}=(s-p_i)^r\,F_1(s)\big|_{s=p_1}$$

$$k_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-p_1)^rF_1(s)]\bigg|_{s=p_1}$$

$$k_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[(s-p_1)^rF_1(s)]\bigg|_{s=p_1}\qquad i=1,2,3,\cdots,k\tag{8-36}$$

$$\cdots$$

$$k_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{(i-1)}}{\mathrm{d}s^{(i-1)}}[(s-p_1)F_1(s)]\bigg|_{s=p_1}$$

【例 8.21】 利用部分分式展开法求下列 $F(s)$ 的单边拉普拉斯逆变换。

$$F(s)=\frac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}$$

【解题思路与技巧】 利用部分分式展开方法求拉普拉斯逆变换。

解： $F(s)$ 为真分式，且极点 $s=-1$ 为一阶极点，极点 $s=-2$ 为二阶极点，将 $F(s)$ 写





成部分分式展开形式

$$F(s)=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_{21}}{(s+2)^2}+\frac{k_{22}}{s+2}$$

有理分式的系数

$$k_1=(s-p_1)F(s)\big|_{s=p_1}=(s+1)\frac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}\bigg|_{s=-1}=1$$

$$k_{21}=(s-p_2)F(s)\big|_{s=p_2}=(s+2)^2\frac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}\bigg|_{s=-2}=2$$

$$k_{22}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-p_2)^2F(s)\bigg|_{s=p_2}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+2)^2\frac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}\right|_{s=-2}$$

$$=(s+2)^2\frac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}\bigg|_{s=-2}=-1$$

将系数代入，可得

$$F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{(s+2)^2}-\frac{1}{s+2}$$

故有

$$f(t)=(\mathrm{e}^{-t}+2t\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

【例 8.22】 求下列函数的单边拉普拉斯逆变换。

$$F(s)=\frac{s^3}{(s+1)^3}$$

【解题思路与技巧】 方法同例 8.21。

解: $F(s)$ 为假分式，利用长除法展开为

$$F(s)=\frac{s^3}{(s+1)^3}=1-\frac{3s^2+3s+1}{(s+1)^3}=1-\left[\frac{k_{11}}{(s+1)^3}+\frac{k_{12}}{(s+1)^2}+\frac{k_{13}}{s+1}\right]$$

其中

$$k_{11}=3s^2+3s+1\big|_{s=-1}=1$$

$$k_{12}=(3s^2+3s+1)'\big|_{s=-1}=-3$$

$$k_{13}=\frac{1}{2}(3s^2+3s+1)''\bigg|_{s=-1}=3$$

于是

$$F(s)=1-\left[\frac{1}{(s+1)^3}-\frac{3}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)}\right]$$

故有

$$f(t)=\delta(t)-\left(\frac{1}{2}t^2-3t+3\right)\cdot\mathrm{e}^{-t}\cdot u(t)$$

3. 当 $F(s)$ 中包含共轭复数极点时

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{s^2+Bs+C}\tag{8-37}$$

其中 $B^2 < 4C$，则 $F(s)$ 中存在有共轭根。

方法 1： 把两个共轭根看成两个单根来处理

将 $F(s)$ 写成

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{s^2+ms+n}=\frac{B(s)}{(s+\alpha+\mathrm{j}\beta)(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)}$$

式中，共轭极点为 $s=-\alpha\pm\mathrm{j}\beta$。

将 $F(s)$ 写成展开式

$$F(s)=\frac{B(s)}{(s+\alpha+\mathrm{j}\beta)(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)}=\frac{k_1}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}+\frac{k_2}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}$$

k_1,k_2 可以采用计算得到

$$\begin{aligned}k_1&=(s+\alpha+\mathrm{j}\beta)F(s)\big|_{s=-\alpha-\mathrm{j}\beta}\\k_2&=(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)F(s)\big|_{s=-\alpha+\mathrm{j}\beta}\end{aligned}\tag{8-38}$$

不难看出 k_1、k_2 呈共轭关系 $\qquad k_1=k_2^*$

共轭极点所对应的信号部分为

$$f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}(k_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta t}+k_1^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta t})u(t)\tag{8-39}$$

方法 2： 利用配方法

采用保留 $F(s)$ 分母多项式中的二次项 (s^2+as+b)，利用配方法将它写成正弦或余弦函数的拉普拉斯变换的形式，然后再对 $F(s)$ 诸项进行逆变换。以下举例说明。

【例 8.23】 设 $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+2s+2}$，求其单边拉普拉斯逆变换 $f(t)$。

【解题思路与技巧】 利用配方法求拉普拉斯逆变换。

解： 将 $F(s)$ 展开成部分分式

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2+2s+2}=\frac{s+3}{(s+1)^2+1}=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+2\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

查表 8-1 可得

$$f(t)=(\cos t\cdot\mathrm{e}^{-t}+2\sin t\cdot\mathrm{e}^{-t})u(t)=(\cos t+2\sin t)\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

综上可知，利用部分分式展开的方法求解 $F(s)$ 为有理式的单边拉普拉斯逆变换较为简便。

【例 8.24】 已知 $F(s)=\dfrac{3s+8}{s^2+3s+2}(1-\mathrm{e}^{-s})\qquad \mathrm{Re}[s]>-1$，求 $f(t)$。

【解题思路与技巧】 利用部分分式展开方法求拉普拉斯逆变换。

解： 引入中间函数 $F_1(s)=\dfrac{3s+8}{s^2+3s+2}$，则 $F(s)=F_1(s)(1-\mathrm{e}^{-s})$

设

$$f_1(t)\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}F_1(s),\ f(t)\xleftrightarrow{\mathrm{LT}}F(s)$$

根据拉普拉斯变换的时移性质，可知

$$f(t)=f_1(t)-f_1(t-1)$$



利用部分分式展开法，得到 $F_1(s)$ 的反变换 $f_1(t)$

$$F_1(s)=\frac{3s+8}{s^2+3s+2}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}=\frac{5}{s+1}-\frac{2}{s+2}$$

考虑到收敛区间为 $\mathrm{Re}\{s\}>-1$。

所以

$$f_1(t)=(5\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

得到

$$f(t)=(5\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t})u(t)-[5\mathrm{e}^{-(t-1)}-2\mathrm{e}^{-(t-1)}]u(t-1)$$

8.5.2　留数法

拉普拉斯逆变换的定义为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \tag{8-40}$$

该式为反演积分公式，反演积分是将拉普拉斯变换 $F(s)$ 的积分线补足为一条半径无穷大的圆弧，以构成一条闭合曲线，形成围线积分，因此上式可改写为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_L F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \tag{8-41}$$

式(8-41)可以利用复变函数中的留数定理来求解。

留数定理适用于在 s 平面上包含有限个孤立奇点的复变函数 $F(s)$。在孤立奇点附近(如 $s=s_0$ 点)函数可以展开为洛朗级数的形式

$$F(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n(s-s_0)^n \tag{8-42}$$

其中 B_n 是展开系数，它是 $F(s)$ 在孤立奇点 $s=s_0$ 处的留数，由此引出留数定理。

根据留数定理：设 L 是 s 平面中的闭合曲线，若函数 $F(s)$ 在 L 上及其内部的有限个孤立奇点 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 之外解析，且各奇点的留数分别为 $K_1,K_2,\cdots,K_n$，则

$$\oint_L F(s)\mathrm{d}s=2\pi\mathrm{j}(K_1,K_2,\cdots,K_n) \tag{8-43}$$

其中 $\oint_L(\cdot)\mathrm{d}s$ 表示沿曲线 L 按逆时针方向的线积分，称为围线积分。

由上式可以看出，拉普拉斯逆变换 $f(t)$ 可以通过求围线中各极点的留数之和来获得。

【知识要点提醒】 留数的计算。

(1) 根据复变函数理论，若 $F(s)$ 为有理真分式，并且 $F(s)\mathrm{e}^{st}$ 的极点 $s=s_i$ 为一阶极点，则该极点的留数为

$$f(t)=\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st}]=(s-s_i)F(s)\mathrm{e}^{st}\big|_{s=s_i} \tag{8-44}$$

(2) 若 $F(s)\mathrm{e}^{st}$ 的极点 $s=s_i$ 为 r 重极点，则该极点的留数为

$$f(t)=\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st}]=\frac{1}{(r-1)!}\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}s^{r-1}}[(s-s_i)^rF(s)\mathrm{e}^{st}]\bigg|_{s=s_i} \tag{8-45}$$



如果拉普拉斯变换 $F(s)$ 中有多个极点，则函数 $f(t)$ 为各个极点的留数之和，即

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n-1} f_i(t) \tag{8-45}$$

【小思考】 对于高阶系统，用部分分式法和用留数法各有什么有点?

【例 8.25】 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)^2}$　　$\mathrm{Re}[s]>-1$，求 $f(t)$。

【解题思路与技巧】 利用留数法求拉普拉斯逆变换。

解：由于 $\mathrm{Re}[s]>-1$，则 $F(s)\mathrm{e}^{st}$ 的极点分别为一阶极点 $s_1=-1$ 和二重极点 $s_2=-2$，根据式(8-43)和式(8-44)，s_1 和 s_2 点的留数分别为

$$\underset{s_1}{\mathrm{Res}}[F(s)\mathrm{e}^{st}]=(s+1)F(s)\mathrm{e}^{st}\big|_{s=-1}=\mathrm{e}^{-t}$$

$$\underset{s_2}{\mathrm{Res}}[F(s)\mathrm{e}^{st}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+2)^2F(s)\mathrm{e}^{st}]\bigg|_{s=-2}=t\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-2t}$$

于是，$f(t)$ 的表达式为　$f(t)=[\mathrm{e}^{-t}+(t-1)\mathrm{e}^{-2t}]u(t)$

【例 8.26】 已知信号 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换 $F(s)$ 为

$$F(s)=\frac{3s^2+s-1}{s(s-1)(s+2)}$$

求其双边拉普拉斯逆变换。

【解题思路与技巧】 根据三个极点的分布将收敛域分为四个区域，然后求出拉普拉斯逆变换。注意：收敛域在最左边极点的左边区域对应的是反因果信号，收敛域在最右边极点的右边区域对应的是因果信号；在两个极点的中间区域对应的是反因果信号和因果信号的叠加。

解：由于

$$s(s-1)(s+2)=0$$

则三个极点为 $s=-2, s=0, s=1$，收敛区域分为四个收敛域。

经因式分解展开成部分分式

$$F(s)=\frac{3s^2+s-1}{s(s-1)(s+2)}=\frac{1}{2s}+\frac{1}{s-1}+\frac{3}{2(s+2)}$$

(1) 当 $\mathrm{Re}[s]<-2$ 时，所有信号对应反因果信号，部分分式应改写为

$$F(s)=\frac{3s^2+s-1}{s(s-1)(s+2)}=-\frac{1}{2(0-s)}-\frac{1}{1-s}-\frac{3}{2(-2-s)}$$

则拉普拉斯逆变换为

$$f(t)=-\frac{1}{2}(1+2\mathrm{e}^{t}+3\mathrm{e}^{-2t})u(-t)$$

(2) 当 $-2<\mathrm{Re}[s]<0$ 时，

极点 $p=-2$ 对应因果信号，$p_2=0$ 和 $p_3=-1$ 对应反因果信号，则部分分式应改写为

$$F(s)=\frac{3s^2+s-1}{s(s-1)(s+2)}=-\frac{1}{2(0-s)}-\frac{1}{1-s}+\frac{3}{2(s+2)}$$

则拉普拉斯逆变换为





$$f(t)=\frac{3}{2}e^{-2t}u(t)-\frac{1}{2}(1-2e^{t})u(-t)$$

(3) 当 $0<\mathrm{Re}[s]<1$ 时，

极点 $p_1=-2$ 和 $p_2=0$ 对应因果信号，$p_3=-1$ 对应反因果信号，则部分分式应改写为

$$F(s)=\frac{3s^2+s-1}{s(s-1)(s+2)}=\frac{1}{2s}-\frac{1}{1-s}+\frac{3}{2(s+2)}$$

则拉普拉斯逆变换为

$$f(t)=\frac{1}{2}(1+3e^{-2t})u(t)-e^{t}u(-t)$$

(4) 当 $\mathrm{Re}[s]>1$ 时，

所有信号均对应因果信号，则部分分式为

$$F(s)=\frac{3s^2+s-1}{s(s-1)(s+2)}=\frac{1}{2s}+\frac{1}{s-1}+\frac{3}{2(s+2)}$$

则拉普拉斯逆变换为

$$f(t)=\frac{1}{2}(1+2e^{t}+3e^{-2t})u(t)$$

本章知识要点

1. 双边拉普拉斯变换

1) 定义

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}\,dt \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}F(s)e^{st}\,ds$$

2) 收敛域

双边拉普拉斯变换的收敛域是一个平行于 Y 轴的带状区域。

2. 单边拉普拉斯变换

单边拉普拉斯变换的定义为

$$F(s)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}\,dt$$

3. 常用信号的单边拉普拉斯变换

常用信号的单边拉普拉斯变换见表 8-1。

4. 单边拉普拉斯变换的特性

单边拉普拉斯性质见表 8-2。

5. 周期信号的拉普拉斯变换

$$F(s)=F_0(s)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}$$

其中 $F_0(s)$ 为周期信号第一个周期的拉普拉斯变换。

6. 拉普拉斯逆变换

1）部分分式展开法

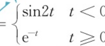
2）留数法

习题 8

8.1　求下列信号的双边拉氏变换，并注明其收敛域。

(1) $f(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t})u(-t)$　　(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)-\mathrm{e}^{-2t}u(-t)$

(3) $f(t)=u(t+1)u(t-1)$　　(4) $f(t)=\begin{cases}\sin 2t & t<0\\ \mathrm{e}^{-t} & t\geqslant 0\end{cases}$



(5) $f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2t} & t<0\\ \cos 4t & t\geqslant 0\end{cases}$

8.2　求下列信号的双边拉氏变换，并注明其收敛域。

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)+\mathrm{e}^{-3t}u(t)$　　(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)+\mathrm{e}^{2t}u(-t)$

(3) $f(t)=\mathrm{e}^{2t}u(t)+\mathrm{e}^{-3t}u(-t)$

8.3　求下列信号单边拉氏变换。

(1) $f(t)=1-\mathrm{e}^{-\alpha t}$　　(2) $f(t)=\sin t+2\cos t$　　(3) $f(t)=2\delta(t)-3\mathrm{e}^{-7t}$

(4) $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t$　　(5) $f(t)=\cos^2(\Omega t)$　　(6) $f(t)=(t+1)u(t)$

(7) $f(t)=(1+t\mathrm{e}^{-t})u(t)$

8.4　求下列信号单边拉氏变换。

(1) $f(t)=\sin(\pi t)[u(t)-u(t-1)]$　　(2) $f(t)=\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)u(t)$

(3) $f(t)=\delta(4t-2)$　　(4) $f(t)=\int_0^t\sin(\pi\tau)\mathrm{d}\tau$

(5) $f(t)=tu(2t-1)$

8.5　求下列信号单边拉氏变换。

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin 2t$　　(2) $f(t)=t\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-1)$　　(3) $f(t)=\frac{\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-5t}}{t}$

(4) $f(t)=\mathrm{e}^{-(t+\alpha)}\cos\omega t$　　(5) $f(t)=t^2\cos 2t$　　(6) $f(t)=\frac{\sin at}{t}$



8.6　求图 8.15 所示信号的单边拉氏变换。

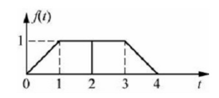


图 8.15　题 8.6 图

8.7　求图 8.16 所示信号的单边拉氏变换。

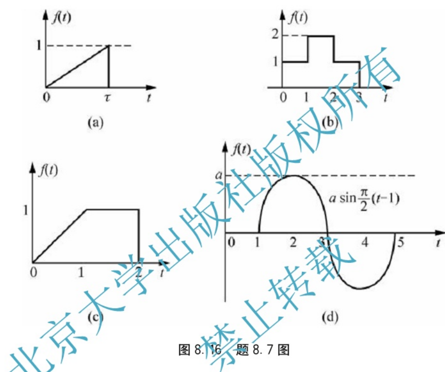


图 8.16　题 8.7 图

8.8　用性质求下列信号的单边拉氏变换。

(1) $u(2t-2)$　　(2) $\sin(2t-1)u(2t-1)$

(3) $e^{-t}\cos(t-2)u(t-2)$　　(4) $\sin(\pi t+1)[u(t)-u(t-2)]$

(5) $(t-1)e^{-t}u(t-1)$　　(6) $\frac{d^2}{dt^2}[e^{-t}\sin t u(t)]$

8.9　求下列信号的单边拉氏变换。

(1) $f(t)=tu(t-1)$

(2) $f(t)=e^{-(t-2)}[u(t-1)-u(t-3)]$

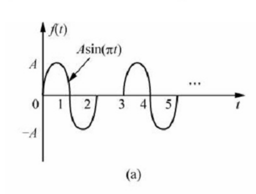
(3) $f(t)=te^{-(t-2)}u(t-1)$

8.10　已知 $f(t)$ 为因果信号，$f(t)\xleftrightarrow{LT}F(s)$，求下列信号的象函数。

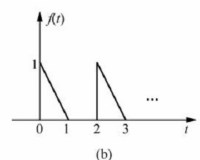
(1) $e^{-3t}f(3t)$　　(2) $(t-2)^2 f\left(\frac{1}{2}t-1\right)$

(3) $te^{-t}f(2t)$　　(4) $f(mt-n)$　$m>0,n>0$

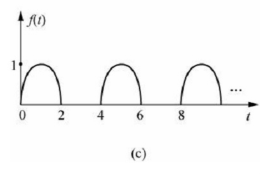
8.11　图 8.17 所示为周期信号，求 $f(t)$ 单边拉氏变换。



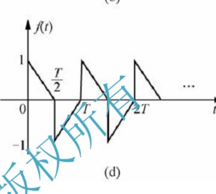
(a)



(b)



(c)



(d)

图 8.17　题 8.11 图

8.12　已知拉普拉斯变换 $F(s)$，求原函数 $f(t)$ 的初值 $f(0)$ 和终值 $f(\infty)$。

(1) $F(s)=\dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)}$　　(2) $F(s)=\dfrac{s(s+1)e^{-2s}}{(s+2)(s+3)}$

(3) $F(s)=\dfrac{s^2+s+1}{s(s+3)}$　　(4) $F(s)=\dfrac{s+2}{(s^2+1)(s+1)}$

8.13　求下列信号的单边拉氏变换的逆变换。

(1) $F(s)=\dfrac{2s+6}{s(s+2)}$　　(2) $F(s)=\dfrac{s+2}{s^2+2s+2}$　　(3) $F(s)=\dfrac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

(4) $F(s)=\dfrac{s^3+s^2+1}{(s+2)(s+1)}$　　(5) $F(s)=\dfrac{e^{-(s-1)}+2}{(s-1)^2+1}$　　(6) $F(s)=\dfrac{se^{-s}+2s+9}{s(s^2+9)}$

8.14　已知信号 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换 $F(s)$ 为

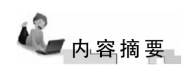
(1) $F(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)}$　　$-3<\mathrm{Re}[s]<-1$

(2) $F(s)=\dfrac{-2}{s^2-12s+35}$　　$5<\mathrm{Re}[s]<7$

(3) $F(s)=\dfrac{2s-8}{s^2-8s+15}$　　$3<\mathrm{Re}[s]<5$

(4) $F(s)=\dfrac{-2}{(s+2)(s+3)(s+4)}$　　$-3<\mathrm{Re}[s]<-2$

第9章 连续时间系统复频域分析及应用



内容摘要

本章主要介绍系统函数的概念，系统的微分方程复频域分析方法，RLC 系统的复频域模型及分析方法，连续时间系统的信号流图表示和系统的稳定性。

教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识	工程应用方向
连续时间系统的零状态响应	熟悉基本信号激励下的零状态响应 掌握一般信号激励下的零状态响应 掌握 RLC 系统的分析方法	系统的频域分析和拉普拉斯变换	系统复频域分析
系统的信号流图	掌握连续时间系统信号流图的基本画法 掌握梅森公式 掌握连续时间系统的系统模拟	连续时间系统的框图	系统复频域分析
系统的稳定性	熟悉系统的零极点 掌握系统的稳定性	稳定系统	分析系统稳定性



教学目标与要求

掌握连续时间系统在基本信号 e^{st} 激励下的零状态响应。

掌握连续时间系统在一般激励下的零状态响应。

掌握 RLC 系统的分析方法。

掌握连续时间系统信号流图。

掌握系统模型及连续时间系统的稳定性。

拉普拉斯变换与傅里叶变换在性质和应用上有很多相似的地方，但它们在本质上又有很大的不同，傅里叶变换反映的是信号与系统的时域与频域之间的关系，是信号的频谱和系统的频率响应。而拉普拉斯变换则是分析连续时间系统的一个重要工具，与傅里叶分析法相比较，可涉及的信号和系统更广泛，尤其在分析非零初始条件的系统时，可自动计入非零起始状态，从而一次可解得零输入响应、零状态响应和全响应。由于拉普拉斯变换建立了时域与复频域（S 域）之间的对应关系，故把用拉普拉斯变换法对系统的分析也称为系统的复频域（S 域）分析。

9.1 连续时间系统的零状态响应

9.1.1 基本信号 e^{st} 激励下的零状态响应

对线性时不变系统而言，当输入信号为 $f(t)$，系统的冲激响应为 $h(t)$，根据连续时间系统的时域分析可知，该系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 为

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) \tag{9-1}$$

若系统的输入信号为基本因果信号 $f(t) = e^{st}$，则有

$$y_{zs}(t) = e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

若 $h(t)$ 为因果系统，则有

$$y_{zs}(t) = e^{st}\int_{0_-}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}H(s) \tag{9-2}$$

式(9-2)中

$$H(s) = \int_{0_-}^{\infty} h(t)e^{-st}dt = \mathrm{LT}[h(t)] \tag{9-3}$$

即 $H(s)$ 是系统冲激响应 $h(t)$ 的单边拉普拉斯变换，称为线性连续时间系统的系统函数，e^{st} 称为系统的特征函数。

【知识要点提醒】 可以得出结论：连续时间线性时不变系统对基本信号 e^{st} 的零状态响应等于 e^{st} 与系统函数 $H(s)$ 的乘积。

9.1.2 一般信号 $f(t)$ 激励下的零状态响应

若连续时间线性系统的输入信号为 $f(t)$，并且 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换存在，由式(9-2)可知，当输入基本因果信号 e^{st} 时，其系统零状态响应的关系可表示为

$$e^{st} \xleftrightarrow{\text{响应}} H(s)e^{st}$$

根据线性系统的齐次性





$$\left[\frac{1}{2\pi j}F(s)ds\right]e^{st} \xleftrightarrow{\text{响应}} \frac{1}{2\pi j}F(s)dsH(s)e^{st}$$

根据线性系统的可加性

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds \xleftrightarrow{\text{响应}} \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)H(s)e^{st}ds$$

由拉普拉斯变换定义

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

则输入信号 $f(t)$ 产生的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 为

$$y_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)H(s)e^{st}ds \tag{9-4}$$

因为 $f(t)$ 是因果信号，$h(t)$ 是因果系统，所以 $y_{zs}(t)$ 也是因果信号。

另一方面，由于 $y_{zs}(t) = f(t) * h(t)$，根据时域卷积性质，则 $y_{zs}(t)$ 的单边拉普拉斯变换为

$$Y_{zs}(s) = \mathrm{LT}[y_{zs}(t)] = F(s)H(s) \tag{9-5}$$

由上式可得，系统函数可以表示为

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{F(s)} \tag{9-6}$$

【知识要点提醒】 由此可见，系统的零状态响应可按以下步骤求解。

(1) 求系统输入信号 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换 $F(s)$。

(2) 求系统函数 $H(s)$。

(3) 求零状态响应的单边拉普拉斯变换 $Y_{zs}(s)$。

(4) 求 $Y_{zs}(s)$ 的单边拉普拉斯逆变换 $y_{zs}(t)$。

【例 9.1】 已知系统的传递函数 $H(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$，系统输入信号为 $f(t) = e^{-3t}u(t)$，求系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

【解题思路与技巧】 直接用 $Y_{zs}(s) = F(s)H(s)$，然后利用拉普拉斯逆变换求取 $y_{zs}(t)$。

解： 由于 $F(s) = \dfrac{1}{s+3}$

$$Y_{zs}(s) = F(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}$$

零状态响应为

$$y_{zs}(t) = \mathrm{LT}^{-1}[Y_{zs}(s)] = \left[\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t)$$

【例 9.2】 已知 LTI 系统的输入信号 $f(t) = 2e^{-t}u(t)$，系统的零状态响应为 $y_{zs}(t) = (2e^{-t} - 4e^{-2t} + 8e^{3t})u(t)$，求系统的单位冲激响应 $h(t)$。

【解题思路与技巧】 本题首先对 $f(t)$ 和 $y_{zs}(t)$ 求拉普拉斯变换，然后用 $H(s) = \dfrac{Y(s)}{F(s)}$



求出传递函数 $H(s)$，最后取拉普拉斯逆变换求取 $h(t)$。

解： 由于

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t)$$

故有

$$Y_{zs}(s) = F(s) \cdot H(s)$$

分别求出 $f(t)$ 和 $y_{zs}(t)$ 的单边拉普拉斯变换

$$F(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$Y_{zs}(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{4}{s+2} + \frac{8}{s-3}$$

$$H(s) = \frac{\frac{3}{s+1} - \frac{4}{s+2} + \frac{8}{s-3}}{\frac{2}{s+1}} = \frac{3}{2} - \frac{2(s+1)}{s+2} + \frac{4(s+1)}{s-3}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{2(s+2-1)}{s+2} + \frac{4(s-3+4)}{s-3} = \frac{7}{2} + \frac{2}{s+2} + \frac{16}{s+3}$$

求 $H(s)$ 拉普拉斯逆变换 $h(t)$

$$h(t) = \frac{7}{2} + (2e^{-2t} + 16e^{3t})u(t)$$

【例 9.3】 已知系统的阶跃响应 $g(t) = e^{-t}u(t)$，若输入信号为 $f(t) = tu(t-2)$，求系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

【解题思路与技巧】 本题首先通过阶跃响应 $g(t)$ 与冲激响应 $h(t)$ 的关系，求出 $H(s)$，然后再求出零状态响应 $y_{zs}(t)$。

解： 由于

$$g(t) = u(t) * h(t)$$

故有

$$G(s) = \frac{1}{s} \cdot H(s)$$

因此

$$H(s) = s \cdot G(s) = s \cdot \frac{1}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1}$$

输入信号为

$$f(t) = tu(t-2) \qquad F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{2e^{-2s}}{s}$$

系统的零状态响应 $Y_{zs}(s)$

$$Y_{zs}(s) = F(s) \cdot H(s) = \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right)e^{-2s}\left(1 - \frac{1}{s+1}\right) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)e^{-2s}$$

求 $Y_{zs}(s)$ 的拉普拉斯逆变换 $y_{zs}(t)$

$$y_{zs}(t) = [1 + e^{-(t-2)}]u(t-2)$$



【例 9.4】 已知系统框图如图 9.1 所示，当输入信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-2t+1}u(t)$ 时，求：(1)系统传递函数 $H(s)$。(2)系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

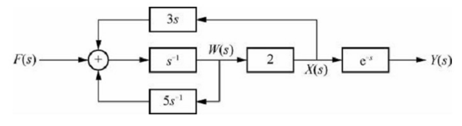


图 9.1　例 9.4 题图

【解题思路与技巧】 首先直接列出 $W(s)$、$X(s)$ 和 $Y(s)$ 的表达式，联立求出 $H(s)$，然后求出零状态响应。

解：(1) 系统传递函数 $H(s)$。

直接列出 $W(s)$、$X(s)$ 和 $Y(s)$ 的表达式

$$W(s)=\left[F(s)+\frac{5}{s}W(s)+3sX(s)\right]\frac{1}{s}$$

$$X(s)=2W(s)$$

$$Y(s)=\mathrm{e}^{-s}X(s)$$

联立方程，解得

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=-\frac{2s}{5(s^2+1)}\mathrm{e}^{-s}$$

(2) 系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

因为 $F(s)=\dfrac{\mathrm{e}}{s+2}$，故有

$$Y(s)=F(s)H(s)=\frac{-2s\mathrm{e}^{-s}}{5(s^2+1)}\frac{\mathrm{e}}{s+2}=-\frac{2}{5}\mathrm{e}\frac{s}{(s^2+1)(s+2)}\mathrm{e}^{-s}$$

$$=-\frac{2}{5}\mathrm{e}\left[\frac{2}{5}\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1}-\frac{2}{5}\frac{1}{s+2}\right]\mathrm{e}^{-s}$$

因此，系统的零状态响应为

$$y(t)=-\frac{2}{5}\mathrm{e}\left[\frac{2}{5}\cos(t-1)+\frac{1}{5}\sin(t-1)-\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2(t-1)}\right]u(t-1)$$

9.2　利用拉普拉斯变换求解微分方程

线性时不变连续时间系统的输入输出关系通常是用线性常系数微分方程来描述的。根据单边拉普拉斯变换的时域微分性质，可以将系统的微分方程变为复频域的代数方程，这就使得求解微分方程变得更加容易。下面以二阶微分方程为例，讨论系统微分方程的零输入响应、零状态响应和全响应。



设连续时间系统的二阶微分方程为

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_2f''(t)+b_1f'(t)+b_0f(t) \tag{9-7}$$

式中，a_1、a_0 和 b_2、b_1、b_0 为实常数。由于 $f(t)$ 为因果信号，因此 $f(0_-)$ 和 $f'(0_-)$ 均为零。

设初始时刻 $t_0=0$，$y(t)$ 的单边拉普拉斯变换为 $Y(s)$，对式(9-7)两边取单边拉普拉斯变换，根据时域微分性质，可得

$$\begin{aligned}&[s^2Y(s)-sy(0_-)-y'(0)]+a_1[sY(s)-y(0)]+a_0Y(s)\\&=b_2s^2F(s)+b_1sF(s)+b_0F(s)\end{aligned} \tag{9-8}$$

经整理后可得

$$(s^2+a_1s+a_0)Y(s)=[(s+a_1)y(0_-)+y'(0_-)]+(b_2s^2+b_1s+b_0)F(s) \tag{9-9}$$

在上式中，分别令

$$A(s)=s^2+a_1s+a_0 \tag{9-10}$$

$$B(s)=b_2s^2+b_1s+b_0 \tag{9-11}$$

$$M(s)=(s+a_1)y(0_-)+y'(0_-) \tag{9-12}$$

整理式(9-9)可得

$$Y(s)=\frac{M(s)}{A(s)}+\frac{B(s)}{A(s)}F(s) \tag{9-13}$$

式(9-8)中，$y(0_-)$ 和 $y'(0_-)$ 分别是 $y(t)$ 和 $y'(t)$ 在 $t=0_-$ 时刻的起始值。$A(s)$ 称为特征多项式，$A(s)=0$ 称为系统的特征方程，$A(s)=0$ 的根称为特征根。$Y(s)$ 的第一项 $\frac{M(s)}{A(s)}$ 只与起始值 $y(0_-)$ 和 $y'(0_-)$ 有关，与系统的输入无关，因此它是系统零输入响应 $y_{zi}(t)$ 的单边拉普拉斯变换 $Y_{zi}(s)$；$Y(s)$ 的第二项 $\frac{B(s)}{A(s)}F(s)$ 只与输入有关，而与起始状态 $y(0_-)$ 和 $y'(0_-)$ 无关，因此它是系统的零状态响应 $y_{zi}(t)$ 的单边拉普拉斯变换 $Y_{zi}(s)$。

对式(9-13)取单边拉普拉斯逆变换，就可以得到系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$、零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和全响应 $y(t)$，即

$$y(t)=\mathrm{LT}^{-1}\left[\frac{M(s)}{A(s)}+\frac{B(s)}{A(s)}F(s)\right] \tag{9-14}$$

$$y_{zi}(t)=\mathrm{LT}^{-1}\left[\frac{M(s)}{A(s)}\right] \tag{9-15}$$

$$y_{zs}(t)=\mathrm{LT}^{-1}\left[\frac{B(s)}{A(s)}F(s)\right] \tag{9-16}$$

由于 $Y_{zs}(s)=F(s)H(s)$，根据式(9-16)，二阶系统的系统函数为

$$H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0} \tag{9-17}$$

设 n 阶连续时间系统的微分方程为

$$\sum_{i=0}^{n}a_iy^{(i)}(t)=\sum_{\mathrm{j}=0}^{m}b_{\mathrm{j}}f^{(\mathrm{j})}(t) \tag{9-18}$$





式中，$n \geqslant m$，$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$，$a_j(\mathrm{j}=0,1,2,\cdots,m)$ 为实常数，则 n 阶连续时间系统的系统函数为

$$H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_2 s^2+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+s^2+a_1 s+a_0} \tag{9-19}$$

式(9-19)给出了系统微分方程和系统函数之间的对应关系。根据这个关系，可由系统的微分方程得到系统函数，也可由系统函数得到系统的微分方程。

【小思考】 求解零输入响应的方法有哪些?

【例 9.5】 已知 LTI 系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f(t)$，激励信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，初始状态 $y(0_-)=1, y'(0_-)=2$。

求：(1) 系统的传递函数 $H(s)$。

(2) 系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。

(3) 系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

(4) 系统的全响应 $y(t)$。

【解题思路与技巧】 该题可以采用分别求取上述四个问题的方法，也可以通过对微分方程两边直接求取拉普拉斯变换的方法直接求出四个问题，这种方法比较简单。但需要注意的是，要分清每一个部分的含义。

解：(1) 系统的传递函数 $H(s)$。

系统的微分方程

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f(t)$$

两边取拉普拉斯变换

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y^{(1)}(0^-)+3[sY(s)-y(0^-)]+2Y(s)=2F(s)$$

$$Y(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}F(s)+\frac{(s+3)y(0^-)+y^{(1)}(0^-)}{s^2+3s+2}=Y_{zs}(s)+y_{zi}(s)$$

$$H(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}$$

(2) 系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。

将 $y(0^-)=1, y'(0^-)=2$ 代入，有

$$Y_{zi}(s)=\frac{s+5}{s^2+3s+2}=\frac{4}{s+1}-\frac{3}{s+2}$$

求拉普拉斯逆变换，可得

$$y_{zi}(t)=(4\mathrm{e}^{-2t}-3\mathrm{e}^{-3t})u(t)$$

(3) 系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

将 $F(s)=L^{-1}[\mathrm{e}^{-t}u(t)]=\dfrac{1}{s+1}$ 代入

$$Y_{zs}(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}\,\frac{1}{s+1}=\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+2}$$

求拉普拉斯逆变换，可得

$$y_{zs}(t)=(2t\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

（4）系统的全响应 $y(t)$。

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(2t\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

【例 9.6】 系统的微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f''(t)+3f'(t)+2f(t)$，输入信号为 $f(t)=u(t)+\mathrm{e}^{-t}u(t)$，系统的全响应为 $y(t)=\left(4\mathrm{e}^{-2t}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{3}\right)u(t)$。

求：（1）系统的传递函数 $H(s)$。

（2）系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

（3）系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。

【解题思路与技巧】 由已知系统的微分方程通过求拉普拉斯变换得出系统传递函数，再由已知的输入信号与传递函数求出零状态响应，最后用全响应减去零状态响应即为零输入响应。

解：（1）系统的传递函数 $H(s)$。

由微分方程可知，系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{s^2+3s+2}{s^2+5s+6}$$

（2）系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

由于输入信号的拉普拉斯变换为

$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}=\frac{2s+1}{s(s+1)}$$

有

$$Y_{zs}(s)=F(s)H(s)=\frac{2s+1}{s(s+1)}\cdot\frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)(s+3)}=\frac{2s+1}{s(s+3)}=\frac{1}{3}\frac{1}{s}+\frac{5}{3}\frac{1}{s+3}$$

因此，系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t)=\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)$$

（3）系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。

$$y_{zi}(t)=y(t)-y_{zs}(t)=(4\mathrm{e}^{-2t}-3\mathrm{e}^{-3t})u(t)$$

【例 9.7】 某线性时不变系统，在起始状态相同的条件下，当输入信号为 $f(t)=\delta(t)$ 时，其全响应为 $y_1(t)=\delta(t)+\mathrm{e}^{-t}u(t)$，当输入信号为 $f(t)=u(t)$ 时，其全响应为 $y_2(t)=3\mathrm{e}^{-t}u(t)$。

求当输入信号为 $f(t)=tu(t)-(t-2)u(t-1)$ 时，系统的全响应 $y(t)$。

【解题思路与技巧】 本题要根据线性时不变系统的性质分析，利用系统全响应为零输入响应与零状态响应线性叠加。同时，$g(t)$ 的零状态响应为 $\delta(t)$ 零状态响应的积分。

解：（1）求单位冲激响应 $h(t)$ 与零输入响应 $y_{zi}(t)$。

由题意可知

$$\begin{cases}\delta(t)+\mathrm{e}^{-t}u(t)=h(t)+y_{zi}(t)\\ 3\mathrm{e}^{-t}u(t)=g(t)+y_{zi}(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\zeta)\mathrm{d}\tau+y_{zi}(t)\end{cases}$$



对上两式求拉普拉斯变换，可得

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{s+1}=H(s)+Y_{zi}(s) \\ \dfrac{3}{s+1}=\dfrac{1}{s}H(s)+Y_{zi}(s) \end{cases}$$

解得

$$H(s)=\frac{s}{s+1}=1-\frac{1}{s+1} \qquad Y_{zi}(s)=\frac{2}{s+1}$$

因此

$$h(t)=\delta(t)-e^{-t}u(t) \qquad y_{zi}(t)=2e^{-t}u(t)$$

（2）求当输入信号为 $f(t)$ 时，系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

由

$$f(t)=tu(t)-(t-2)u(t-1)=tu(t)-(t-1)u(t-1)-u(t-1)$$

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$$

故

$$Y_{zs}(s)=F(s)\cdot H(s)$$

由于 $F(s)=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s^2}e^{-s}-\dfrac{1}{s}e^{-s}$，可得

$$Y_{zs}(s)=\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-s}\right]\cdot\frac{s}{s+1}=\frac{1-e^{-s}}{s(s+1)}-\frac{e^{-s}}{s+1}$$

$$=\frac{1}{s}(1-e^{-s})-\frac{1}{s+1}(1-e^{-s})-\frac{1}{s+1}e^{-s}$$

故有

$$y_{zs}(t)=u(t)-u(t-1)-e^{-t}u(t)$$

（3）系统的全响应 $y(t)$。

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=u(t)-u(t-1)+e^{-t}u(t)$$

9.3　利用拉普拉斯变换进行电路网络分析

拉普拉斯变换不但可以很方便地求解微分方程，而且在分析电路网络中也具有明显的优势。由电阻元件、电感元件、电容元件和电源组成的网络系统是线性时不变系统，简称为 RLC 系统。RLC 系统的输入输出关系是用线性常系数微分方程来描述的，显然也可以用拉普拉斯变换来求解。

直接建立 RLC 系统的微分方程的过程是比较复杂的，但利用 RLC 元件的复频域模型和电路基础中学过的基本定律（如基尔霍夫定律）来求解电路网络就容易很多。这种分析方法通常称为复频域分析法或 S 域分析法。本节就采用 S 域分析法来求解电路网络。

1. 电阻元件模型

电阻元件的电压与电流的时域关系为

$$V_R(t) = Ri_R(t) \tag{9-20}$$

对式(9-20)式两边取拉氏变换，得

$$V_R(s) = RI_R(s) \tag{9-21}$$

由式(9-21)可得到电阻元件的复频域模型如图 9.2 所示。显然，电阻元件的复频域模型与时域模型具有相同的形式。

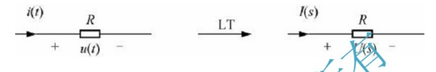


图 9.2　电阻元件的复频域模型

2. 电容元件模型

电容元件的电压与电流的时域关系为

$$u_C(t) = u(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_+}^{\tau} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9-22}$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) \tag{9-23}$$

将上式两边取拉普拉斯变换，得

$$U_C(s) = \frac{u_C(0_-)}{s} + \frac{1}{sC}I_C(d) \tag{9-24}$$

$$I_C(s) = sCU(s) - Cu_C(0_-) \tag{9-25}$$

上式表明，一个具有初始电压的电容元件，其复频域模型为一个复频容抗与电压源相串联，或者是与电流源并联，如图 9.3 所示。

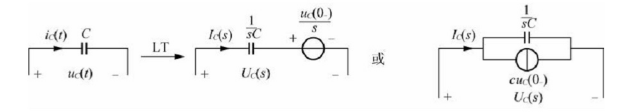


图 9.3　电容元件复频域模型

3. 电感元件模型

电感元件的电压与电流的时域关系为

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t) \tag{9-26}$$



将上式两边取拉氏变换，得

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-) \tag{9-27}$$

或

$$I_L(s) = \frac{1}{sL}U_L(s) - \frac{i_L(0_-)}{s} \tag{9-28}$$

式(9-28)表明，一个具有初始电流的电感元件，其复频域模型为一个复频感抗与电压源相串联，或者是与电流源相并联，如图 9.4 所示。

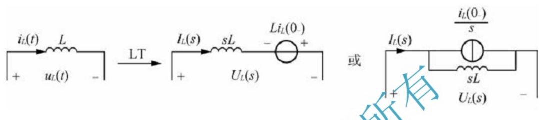


图 9.4 电感元件复频域模型

【知识要点提醒】 把 RLC 电路网络中的元件及信号源都用它的复频域模型来代替，利用电路基础中学过的基本定律(如基尔霍夫定律 KVL 及 KCL)，可将时域电路模型变换到复频域电路模型。在复频域电路中，电压与电流的关系是代数关系，可以应用与电阻电路一样的分析方法与定理列写并求解相应的方程式。

【例 9.8】 RLC 电路如图 9.5 所示，当输入信号 $f(t)=2te^{5t}u(t)$ 时，求电路的输出信号 $Y(s)$。

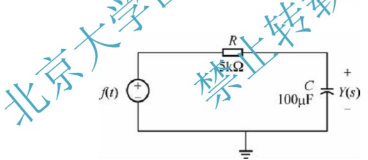


图 9.5 例 9.8 题图

【解题思路与技巧】 首先将电路图改写成复频域电路模型，然后根据复频域模型写出电路的传递函数 $H(s)$，最后求出系统的输出信号 $Y(s)$。

解： 将时域电路模型转换为复频域电路模型，如图 9.6 所示。

由复频域模型图，可得

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{sRC+1}$$

由于 $R=5\text{k}\Omega, R=100\mu\text{F}$, 则

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{2}{s+2}$$

而 $f(t)=2te^{5t}u(t)$, 则

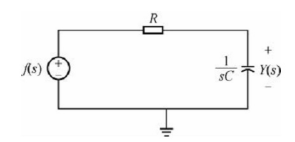


图 9.6　例 9.8 题复频域模型图

$$F(s)=\frac{2}{(s-5)^2}$$

故该电路的输出响应的拉普拉斯变换为

$$Y(s)=H(s)F(s)=\frac{2}{s+2}\cdot\frac{2}{(s-5)^2}=\frac{4}{(s+2)(s-5)^2}$$

【例 9.9】 RLC 串联电路如图 9.7 所示。已知 $R=3\Omega$，$L=1\text{H}$，$C=0.5\text{F}$，电感和电容上的初始条件 $u_C(0_-)=1\text{V}$，$i_L(0_-)=1\text{A}$，输入信号为 $u_s(t)=tu(t)$。

求：(1) 电路系统传递函数 $H(\text{s})$。

(2) 电路电流的零输入响应 $i_{zi}(t)$。

(3) 电路电流的零状态响应 $i_{zs}(t)$。

(4) 电路电流的全响应 $i(t)$。

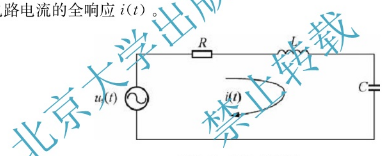


图 9.7　例 9.9 题图

【解题思路与技巧】 首先将电路图改写成复频域电路模型，然后根据复频域模型写出电路的传递函数 $H(s)$，最后求出系统的各个输出信号。

解： 将时域电路模型转换为复频域电路模型，如图 9.8 所示。

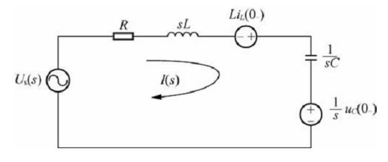


图 9.8　例 9.9 题复频域模型图

由基尔霍夫电压定律 KVL 可得



$$U_s(s)=RI(s)+sLI(s)-Li_L(0_-)+\frac{1}{sC}I(s)+\frac{1}{s}u_C(0_-)$$

将整理可得

$$I(s)=\frac{U_s(s)+Li_L(0_-)-\frac{u_C(0_-)}{s}}{R+sL+\frac{1}{sC}}$$

$$=\frac{U_s(s)}{R+sL+\frac{1}{sC}}+\frac{Li_L(0_-)-\frac{u_C(0_-)}{s}}{R+sL+\frac{1}{sC}}$$

$$=I_{zs}(s)+I_{zi}(s)$$

上式第一项取决于输入信号而与初始状态无关，它是零状态响应 $i_{zs}(t)$ 的拉氏变换，记作 $I_{zs}(s)$，第二项仅取决于初始状态而与输入信号无关，它是零输入响应 $i_{zi}(t)$ 的拉氏变换，记作 $I_{zi}(s)$。

由于输入信号的拉普拉斯变换为

$$U(s)=\mathrm{LT}[tu(t)]=\frac{1}{s^2}$$

将输入信号 $U(s)$ 和给定的 R、L、C 元件值代入，可得

$$I(s)=\frac{1}{s(s^2+3s+2)}+\frac{s-1}{s^2+3s+2}=I_{zs}(s)+I_{zi}(s)$$

1）电路系统传递函数 $H(s)$

由 $I_{zs}(s)=\dfrac{U_s(s)}{R+sL+\frac{1}{sC}}$，有

$$H(s)=\frac{I_{zs}(s)}{U_s(s)}=\frac{1}{R+sL+\frac{1}{sC}}=\frac{s}{s^2+3s+2}$$

2）电路电流的零输入响应 $i_{zi}(t)$

$$I_{zi}(s)=\frac{s-1}{s^2+3s+2}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}$$

求得 $k_1=-2, k_2=-3$。

代入参数

$$I_{zi}(s)=-\frac{2}{s+1}-\frac{3}{s+2}$$

由拉普拉斯逆变换，可得

$$i_{zi}(t)=(-2\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

3）电路电流的零状态响应 $i_{zs}(t)$

$$I_{zs}(s)=\frac{1}{s(s^2+3s+2)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{s+2}$$

求得 $k_1=\frac{1}{2}, k_2=-1, k_3=\frac{1}{2}$。

代入参数，可得

$$I_{zs}(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

由拉普拉斯逆变换，可得

$$i_{zs}(t)=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$$

4）电路电流的全响应 $i(t)$ $H(s)$

$$i(t)=i_{zi}(t)+i_{zs}(t)=\left(-2\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-3\mathrm{e}^{-t}-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$$

【例 9.10】 电路如图 9.9(a)所示，电路中 $R_1=1\text{k}\Omega, R_2=5\text{k}\Omega, C=200\mu\text{F}$，输入信号为在 $t=0$ 时接入的全波整流正弦信号如图 9.9(b)所示，试求：$u_o(t)$ 的稳态响应。

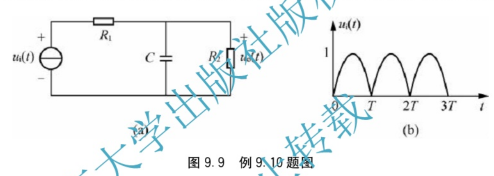


图 9.9 例 9.10 题图

【解题思路与技巧】 稳态响应是电路达到稳态时的输出响应。本题根据节点电压法列写电路微分方程，然后求拉普拉斯变换。注意对初始条件 $u_o(0_-)$ 的求解利用 $u_o(0_-)=u_o(T_-)$。

解： 列节点电压方程

$$C\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{u_o(t)}{R_2}=\frac{1}{R_1}[u_i(t)-u_o(t)]$$

$$\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}u_o(t)=\frac{1}{CR_1}u_i(t)$$

代入元件参数

$$\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t}+6u_o(t)=5u_i(t)$$

可以证明，系统的全响应和稳态响应均满足上述方程。

对上式求拉普拉斯变换，可得

$$sU_o(s)-u_o(0_-)+6U_o(s)=5U_i(s)$$

经化简，可得

$$U_o(s)=\frac{5}{s+6}U_i(s)+\frac{1}{s+6}u_o(0_-)$$



由于输入信号为周期信号，所以当稳态响应衰减为零时稳态响应仍是周期信号。

当 $0<t<T$ 时，输入信号为

$$u_{\mathrm{i}}(t)=\sin\frac{\pi}{T}t[u(t)-u(t-T)]$$

则其拉普拉斯变换为

$$U_{\mathrm{i}}(s)=\frac{\frac{\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{\pi}{T}\right)^2}(1-\mathrm{e}^{-sT})$$

代入到 $U_{\mathrm{o}}(s)$ 可得

$$U_{\mathrm{o}}(s)=\frac{5}{s+6}\frac{\frac{\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{\pi}{T}\right)^2}(1-\mathrm{e}^{-sT})+\frac{1}{s+6}u_{\mathrm{o}}(0_-)$$

对上式求拉普拉斯逆变换，可得

$$u_{\mathrm{o}}(t)=\frac{5\frac{\pi}{T}}{6^2+\left(\frac{\pi}{T}\right)^2}\left\{\left[\mathrm{e}^{-6t}-\cos\frac{\pi}{T}t+\frac{6T}{\pi}\sin\frac{\pi}{T}t\right]u(t)-\right.$$

$$\left.\left[\mathrm{e}^{-6(t-T)}-\cos\frac{\pi}{T}(t-T)+\frac{6T}{\pi}\sin\frac{\pi}{T}(t-T)\right]u(t-T)\right\}+u_{\mathrm{o}}(0_-)\mathrm{e}^{-6t}u(t)$$

由于 $u_i(t)$ 以 T 为周期，所以当电路达到稳态时，稳态响应可以忽略，必有 $u_{\mathrm{o}}(T_-)=u_{\mathrm{o}}(0_-)$，将此关系式代入上式，可得

$$u_{\mathrm{o}}(T_-)=\frac{5\frac{\pi}{T}}{6^2+\left(\frac{\pi}{T}\right)^2}\left[\mathrm{e}^{-6t}-\cos\frac{\pi}{T}T+\frac{6T}{\pi}\sin\frac{\pi}{T}T\right]+u_{\mathrm{o}}(0_-)\mathrm{e}^{-6T}=u_{\mathrm{o}}(0_-)$$

解得

$$u_{\mathrm{o}}(0_-)=\frac{1+\mathrm{e}^{-6T}}{1-\mathrm{e}^{-6T}}\cdot\frac{5\frac{\pi}{T}}{6^2+\left(\frac{\pi}{T}\right)^2}$$

将 $u_{\mathrm{o}}(0_-)$ 代入 $u_{\mathrm{o}}(t)$ 得稳态响应

$$u_{\mathrm{o}}(t)=\frac{5\frac{\pi}{T}}{6^2+\left(\frac{\pi}{T}\right)^2}\left[\left(1+\frac{1+\mathrm{e}^{-6T}}{1-\mathrm{e}^{-6T}}\right)\mathrm{e}^{-6t}-\cos\frac{\pi}{T}t+\frac{6T}{\pi}\sin\frac{\pi}{T}t\right]u(t)-$$

$$\left[\mathrm{e}^{-6(t-T)}-\cos\frac{\pi}{T}(t-T)+\frac{6T}{\pi}\sin\frac{\pi}{T}(t-T)\right]u(t-T)$$

$$=\frac{5\frac{\pi}{T}}{6^2+\left(\frac{\pi}{T}\right)^2}\left[\frac{2\mathrm{e}^{-6t}}{1-\mathrm{e}^{-6T}}-\cos\frac{\pi}{T}t+\frac{6T}{\pi}\sin\frac{\pi}{T}t\right]u(t)-$$

$$\left[\mathrm{e}^{-6(t-T)} - \cos\frac{\pi}{T}(t-T) + \frac{6T}{\pi}\sin\frac{\pi}{T}(t-T)\right]u(t-T) \qquad (n-1)T < t < nT$$

9.4 连续时间系统信号流图及系统的模拟

对一般的线性时不变系统通常用线性常系数微分方程来描述，这对分析一般简单的电路网络非常有效和方便，但对大型网络系统建立微分方程比较困难，因此，在分析这类系统时，可以采用另外一种特殊的系统模型分析方法——系统信号流图分析法。

信号流图是系统数学模型与原理图模型的结合，它不仅可以给出系统中各部分的方程，也可以表示各组成部分之间的相互联系。因此，信号流图为系统的结构提供了大量信息，并为确定系统方程或传递函数提供了所需的全部信息。

系统框图是在系统比较简单时系统结构的表示形式，它可以用来表示一般系统的线性常系数微分方程。同时，系统框图也是系统信号流图的初级形式。本节首先讨论系统框图在系统表示时的作用、系统框图的画法及系统框图与微分方程的关系，然后介绍信号流图在系统分析中的作用及方法。

9.4.1 连续时间系统的框图表示

连续时间 LTI 系统可以用一个矩形方框图来简单表示，如图 9.10 所示。其含义是系统将输入信号 $f(t)$ 转换为输出信号 $y(t)$，即用 $y(t) = \mathrm{T}[f(t)]$ 来表示。方框类似于一个“黑盒子”，其内部的具体结构、参数如何并不是主要关心的对象。

$f(t)$ → T[ ] → $y(t)$

图 9.10 系统的框图表示

系统的内部结构可以很复杂，也可以很简单。最简单的系统如放大器、滤波器、延迟器等，电路系统则是由若干电路元件如电阻、电感和电容等，通过串、并联方式构成。在进行系统仿真时使用三种基本运算：相加、数乘和积分，它们对应着三种基本模拟运算器件：加法器、数乘器和积分器。复杂系统往往是由几个相对简单独立的系统组合而成，系统的组合方式有级联、并联、混联以及反馈等，这样的复杂系统又称复合系统，组成复合系统的每个独立系统也称子系统。这种关系用方框图来表示很简单，也便于理解。

1. 系统的级联形式

设复合系统的系统函数 $H(s)$ 能够分解成两个独立系统函数 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 的乘积：

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \tag{9-29}$$

在复频域中，复合系统的响应可以从下式得到





$$Y(s)=F(s)H(s)=[F(s)H_1(s)]H_2(s) \tag{9-30}$$

令 $Y_1(s)=F(s)H_1(s)=F_2(s)$，则 $Y(s)=F_2(s)H_2(s)$

由此可见，信号 $Y_1(s)$ 为子系统 $H_1(s)$ 的输出，并将它作用到子系统 $H_2(s)$，系统 $H_2(s)$ 的输出也就是整个系统的输出。这一系统可用图 9.11 所示的级联形式表示。

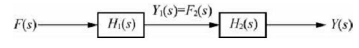


图 9.11　系统的级联方框图

该图表明两个级联的系统的系统函数等于两个子系统函数的乘积。据此很容易推广到 n 个级联系统的系统函数等于各个子系统函数的乘积：

$$H(s)=H_1(s)H_2(s)\cdots H_n(s) \tag{9-31}$$

2. 系统的并联形式

一般情况下，复合系统的系统函数 $H(s)$ 可以分解为几个简单的系统函数 $H_1(s)$，$H_2(s)$，…之和。利用部分分式展开法将有理分式的系统函数 $H(s)$ 展开成部分分式，每一个部分分式都对应一个独立低阶子系统：

$$H(s)=H_1(s)+H_2(s)+\cdots+H_n(s)=\frac{k_1}{s+p_1}+\frac{k_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s+p_n} \tag{9-32}$$

整个系统可以看成是 n 个子系统的叠加(并联)，系统的输出

$$Y(s)=F(s)H(s)=F(s)H_1(s)+F(s)H_2(s)+\cdots+F(s)H_n(s) \tag{9-33}$$

这种关系可以用如图 9.12 所示的并联结构表示。

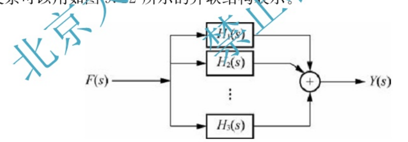


图 9.12　系统的并联方框图

3. 系统的反馈形式

反馈系统在电子信息、通信工程和自动化控制中应用非常广泛，如自动控制系统的基本结构就是反馈系统。最基本的反馈系统方框图如图 9.13 所示。

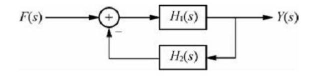


图 9.13　系统的反馈形式方框图

由图 9.13 可知，信号的流通构成闭合回路，即反馈系统的输出信号又被引入到输入端，形成反馈，反馈包括正反馈和负反馈。通常为保证系统稳定，引入的反馈信号与输入相减，这种反馈则称为负反馈；若引入的反馈信号与输入相加，该反馈为正反馈。正反馈在实际电路中也有应用，如振荡器电路。实际应用中，根据需要可采用不同的反馈。

在反馈控制电路中，除了输入外，输出也通过反馈形成了对系统的控制。这种输出信号能通过反馈对系统控制直接影响的反馈系统称为闭环系统，闭环系统的传递函数 $H(s)$ 也称为闭环增益。相应地，若输出信号对系统控制没有影响的系统则称为开环系统，开环部分的传递函数 $H(s)$ 称为开环增益。反馈(闭环)系统一般可由开环系统与反馈两部分组成。图 9.13 中，除去反馈部分剩下的是开环系统，开环部分的传递函数为 $H_1(s)$，反馈部分的传递函数为 $H_2(s)$，整个反馈系统的传递函数(闭环增益) $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)} \tag{9-34}$$

4. 系统框图的基本运算单元

用信号流图(或系统框图)表示系统结构的方法称为系统模拟，系统模拟主要用到三种基本模拟运算器件：加法器、数乘器和积分器，它们是最简单的系统。描述系统的输入、输出关系既可用数学方程描述，也可由基本运算器组成的模拟图描述。

下面介绍三种基本运算的模拟。

基本运算模拟的加法器、数乘器、积分器有时域、复频域两种表示方法，所以一般模拟图既可用时域也可用复频域表示。系统函数反映了系统的输入、输出关系，其表达式是有理式，运算关系简单。下面介绍系统基本模拟框图的形式。

1）加法器

加法器时域和频域模拟框图如图 9.14 所示。

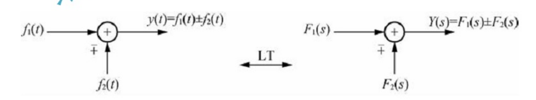


图 9.14　加法器时域和频域模拟框图

2）数乘器

数乘器又称标量乘法器，数乘器时域和频域模拟框图如图 9.15 所示。

$f(t) \rightarrow \boxed{a} \rightarrow y(t)=af(t)$　$\xleftrightarrow{LT}$　$F(s) \rightarrow \boxed{a} \rightarrow Y(s)=aF(s)$

图 9.15　数乘器时域和频域模拟框图

3）积分器

时域和复频域中的积分运算不同，对积分运算关系取拉普拉斯变换，可以得到



$$y(t)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9-35}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}F(s) \tag{9-36}$$

积分器时域和频域模拟框图如图 9.16 所示。

图 9.16　积分器时域和频域模拟框图

5. 系统微分方程与系统框图的关系

系统微分方程与系统框图之间有着一定对应关系，可以由系统微分方程画出系统框图，同样也可以由系统框图写出系统的微分方程。

下面以一阶和二阶系统为例，利用基本运算器分析系统的微分方程与系统模拟框图之间的关系。

设一阶系统的微分方程和系统函数为

$$y'(t)+a_0y(t)=f(t)$$

$$H(s)=\frac{1}{s+a_0} \tag{9-37}$$

将一阶系统的微分方程改写为

$$y'(t)=f(t)-a_0y(t) \tag{9-38}$$

将 $y'(t)$ 作为积分器的输入，得到一阶系统微分方程的时域和复频域模拟图，如图 9.17 所示。

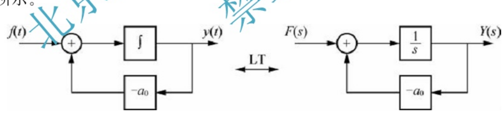


图 9.17　一阶系统微分方程的时域和复频域模拟图

一阶线性微分方程系统模拟的方法可推广至二阶微分方程系统模拟，其微分方程和系统函数为

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=f(t)$$

$$H(s)=\frac{1}{s^2+a_1s+a_0} \tag{9-39}$$

改写微分方程

$$y''(t)=f(t)-a_1y'(t)-a_0y(t) \tag{9-40}$$

积分器的输入为 $y''(t)$，经两次积分得到 $y(t)$，其模拟图如图 9.18 所示。

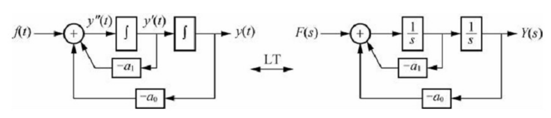


图 9.18 二阶系统微分方程的时域和复频域模拟图

9.4.2 系统的信号流图表示、梅森公式

信号流图是用节点和有向线段等来描述系统，它不仅可以用来表示系统的输入、输出关系，而且还能表示信号在系统中的传输方向和信号相互之间的关系，也是系统方框图的一种简化形式。

【知识要点提醒】 用信号流图表示系统的具体规则是：用带箭头的有向线段代替模拟图中的方框；有向线段的两个端点为节点，表示原方框的输入与输出；有向线段箭头的方向是信号传输的方向，原方框的传递系数(支路增益)直接标在箭头旁；有两个以上有向线段指向一个节点的，表示相加或相减(传递系数有负号)。

1. 信号流图的基本概念

为了便于理解，将基本运算单元的方框图表示和信号流图表示的对应关系用图 9.19 表示。

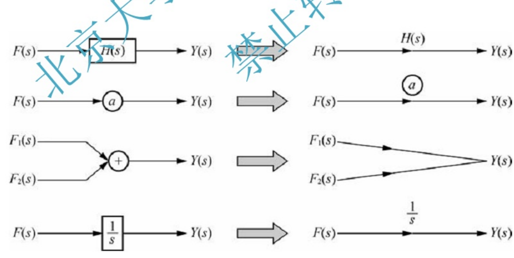


图 9.19 基本框图与信号流图的对应关系

对于各阶系统的级联、并联、反馈网络的方框图，都可以用信号流图来表示。如图 9.20、图 9.21 和图 9.22 所示。

为了更好地利用信号流图对系统进行分析，下面先介绍几个有关的术语。

1) 节点

信号流图中表示信号的点称为节点。





图 9.20 级联系统框图与信号流图

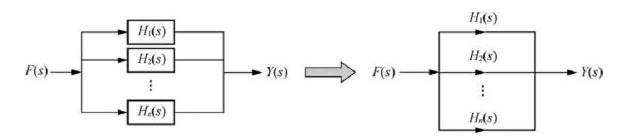


图 9.21 并联系统框图与信号流图

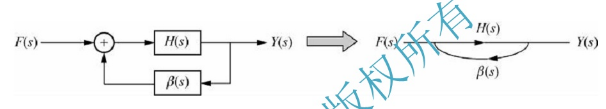


图 9.22 反馈系统框图与信号流图

2）支路和支路增益

连接两个节点间的有向线段称为支路。支路上的函数称为支路传输函数或支路增益。

3）源点与汇点

仅有输出支路的节点称为源点，仅有输入支路的节点称为汇点。

4）通路与通路增益

从一个节点出发，经过一条或几条支路到达另一个节点的路径称为通路。通路中各支路增益的乘积为通路增益。特别是连接输入与输出的通路称为前向通路。从输出到输入的通路称为反向通路或反馈通路。

5）环路(回路)与环路(回路)增益

从一个节点出发，沿某一条通路，不经重复回到同一节点的闭合通路称为环路(回路)，环路中各支路增益的乘积为环路(回路)增益。

6）开路

一条通路与它经过的任意一个节点只相遇一次，该通路称为开路。

7）接触

有公共节点的通(回)路称为接触通(回)路，反之，没有公共节点的通(回)路为不接触通(回)路。

2. 梅森公式

用信号流图分析系统，不仅希望能够通过系统微分方程(传递函数)画出系统的信号流图，也希望能够从信号流图中求出系统的微分方程(传递函数)。能够很好地说明系统微分

方程(传递函数)与系统信号流图之间关系的是梅森公式。

$$H(s)=\frac{\sum_{k=1}^{n}T_k(s)\Delta_k(s)}{\Delta(s)} \tag{9-41}$$

式中：

$$\Delta(s)=1-\sum_i L_i(s)+\sum_{j,k}L_j(s)L_k(s)-\sum_{p,q,r}L_p(s)L_q(s)L_r(s)+\cdots \tag{9-42}$$

称为信号流图的特征行列式。

Δ(s)中各项的含义是：

$\sum_i L_i(s)$ 表示信号流图中所有环路传输增益之和，L_i 是第 i 个环路的传输增益。

$\sum_{j,k}L_j(s)L_k(s)$ 表示信号流图中所有两两互不接触环路增益的乘积之和，若两个环路没有公共节点或支路，则称这两个环路不接触。

$\sum_{p,q,r}L_p(s)L_q(s)L_r(s)$ 是所有三个互不接触回路增益的乘积之和，若三个环路没有公共节点或支路，则称这三个环路不接触。分子中各项含义：

n 表示从输入节点(源点) $F(s)$ 到输出节点(汇点) $Y(s)$ 之间开路的数目。

$T_k(s)$ 表示输入节点(源点) $F(s)$ 到输出节点(汇点) $Y(s)$ 之间的第 k 条开路的传输函数。

$\Delta_k(s)$ 称为第 k 条开路特征行列式的余子式。它是与第 k 条开路不接触的子流图的特征行列式。也可以理解为，$\Delta_k(s)$ 是原信号流图中删去第 k 条开路后，即删去开路上所有节点和支路后剩余信号流图的特征行列式。

【知识要点提醒】 如果连接输入输出的前向通路与所有回路都有接触且各回路都有接触，则 $\Delta_k(s)=1$，梅森公式可以简化为

$$H(s)=\frac{\text{前向通路增益之和}}{1-\text{所有回路增益之和}} \tag{9-43}$$

注意： 当某一条支路的传递函数为 1 时，传递函数可以不标。

【例 9.11】 用梅森公式求出图 9.23 所示系统的传递函数 $H(s)$。

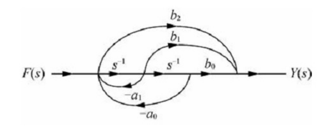


图 9.23 例 9.11 题图

【解题思路与技巧】 根据梅森公式，分别写出前向通路和回路表达式，然后代入公式。

解： 由图可知，信号流图中前向开路有三条，回路有两条，且连接输入输出的前向开





路与所有回路都有接触，故

$$\Delta_k(s)=1$$

而各开路的增益分别为：前向开路 1 增益为 $T_1=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}\cdot b_0=\frac{b_0}{s^2}$；前向开路 2 增益为 $T_2=\frac{1}{s}\cdot b_1=\frac{b_1}{s}$；前向开路 3 增益为 $T_3=b_2$。

各回路增益分别为：回路 1 增益为 $L_1=-\frac{a_1}{s}$；回路 2 增益为 $L_2=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}\cdot(-a_0)=-\frac{a_0}{s^2}$；由梅森公式可以写出系统函数为

$$H(s)=\frac{\frac{b_0}{s^2}+\frac{b_1}{s}+b_2}{1-\left(-\frac{a_1}{s}-\frac{a_0}{s^2}\right)}=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$$

【例 9.12】 用梅森公式求出图 9.24 所示系统的传递函数 $H(s)$。

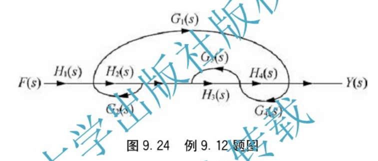


图 9.24　例 9.12 题图

【解题思路与技巧】 方法同例 9.11。

解： 系统信号流图中共有四个独立环路，环路的传输函数分别为

$$L_1=H_2(s)G_2(s)\qquad L_2=H_3(s)G_3(s)$$

$$L_3=H_4(s)G_4(s)\qquad L_4=H_2(s)H_3(s)H_4(s)G_1(s)$$

有两个两两不相接触的环路，即环路 1 和环路 2，环路 1 和环路 3。两对两两互不接触环路的传输函数乘积分别为

$$L_1L_2=H_2(s)G_2(s)H_3(s)G_3(s)$$

$$L_1L_3=H_2(s)G_2(s)H_4(s)G_4(s)$$

系统信号流图中从 $F(s)$ 到 $Y(s)$ 只有一条开路，开路传输函数 $T_1(s)$ 和对应的剩余信号流图特征行列式分别为

$$T_1(s)=H_1(s)H_2(s)H_3(s)H_4(s)$$

$$\Delta_1=1$$

根据梅森公式，得到系统信号流图的特征行列式为

$$\begin{aligned}\Delta&=1-(L_1+L_2+L_3+L_4)+(L_1L_2+L_1L_3)\\&=1-[\mathrm{H}_2(s)G_2(s)+H_3(s)G_3(s)+H_4(s)G_4(s)+H_2(s)H_3(s)H_4(s)G_1(s)]\\&\quad+[H_2(s)G_2(s)H_3(s)G_3(s)+\mathrm{H}_2(s)G_2(s)H_4(s)G_4(s)]\end{aligned}$$

经整理可得，该信号流图所表示系统的传递函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{T_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{H_1(s)H_2(s)H_3(s)H_4(s)}{\Delta}$$

【小思考】 梅森公式的主要应用是什么？

9.4.3 系统的模拟

在进行系统设计时，除了要建立系统数学模型，以便在理论上对系统进行数学分析外，往往还需要对系统进行计算机模拟。系统模拟是利用一些基本运算单元构成一个与原系统具有相同数学模型的模拟系统，然后对该模拟系统进行理论分析和计算，并将理论分析和计算结果作为指导设计组成实际系统的理论基础。

LTI 系统的数学模型通常是常系数线性微分方程，由于微分方程和系统传递函数 $H(s)$ 之间有确定的对应关系，因此下面主要讨论以系统函数 $H(s)$ 为数学模型的系统模拟方法。

由于具有相同输入输出关系的系统，系统实现的结构、参数不是唯一的，因此系统模拟的实现也有不同的方法。模拟系统可以用框图表示，也可以用信号流图表示，后者比较简单。由系统函数 $H(s)$ 得到系统的信号流图通常有直接形式、级联形式和并联形式等。

下面分别进行讨论。

1. 直接形式

在前面已经讨论并给出了一阶、二阶系统的模拟框图。在实际系统中，除了极点之外，一般还有零点。例如一般二阶系统的系统函数为

$$H(s)=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0} \tag{9-44}$$

将上式改写为

$$H(s)=\frac{b_2+b_1s^{-1}+b_0s^{-2}}{1+a_1s^{-1}+a_0s^{-2}} \tag{9-45}$$

由此，二阶系统的系统框图和系统模拟信号流图如图 9.25 所示。

由一般二阶系统的模拟不难推广到 n 阶系统（$m\leqslant n$）

$$H(s)=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0} \tag{9-46}$$

一般 n 阶系统的系统框图和系统模拟信号流图如图 9.26 所示。由图可知，一般 n 阶系统模拟有 n 个积分器。在系统模拟图中，系数 $a_i=b_j=0$ 时为开路，$a_i=b_j=1$ 时为短路。

【知识要点提醒】 系统模拟的直接形式可按照梅森公式表达式画出。





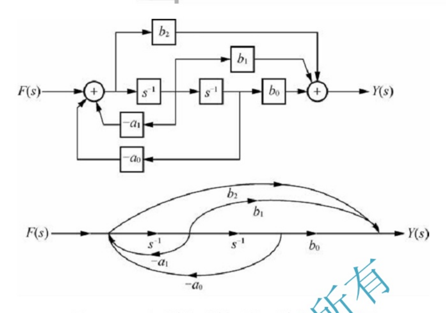


图 9.25　二阶系统的系统框图和系统模拟信号流图

图 9.26　n 阶系统的系统框图和系统模拟信号流图



2. 级联(串联)形式

如果系统由 n 个子系统级联组成，则系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=H_1(s)H_2(s)\cdots H_n(s) \tag{9-47}$$

若要画出系统级联模拟信号流图，先将 $H(s)$ 的分子、分母进行因式分解，写成

$$H(s)=\frac{\prod\limits_{i}(s-z_i)}{\prod\limits_{j}(s-p_j)} \tag{9-48}$$

然后分别画出每个子系统的直接形式模拟图，再将子系统级联(串联)起来。

3. 并联形式

如果系统由 n 个子系统并联组成，则系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=H_1(s)+H_2(s)+\cdots+H_n(s) \tag{9-49}$$

若要画出系统并联模拟信号流图，先将 $H(s)$ 的分子、分母进行因式分解，再写成部分分式形式

$$H(s)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(s-z_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}(s-p_j)} \tag{9-50}$$

然后分别画出每个子系统的直接形式模拟图，再将子系统并联起来。

【例 9.13】 已知 LTI 系统的传递函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{s^2+2s}{s^3+8s^2+19s+12}$$

分别画出系统模拟的直接形式，级联(串联)形式和并联形式。

【解题思路与技巧】 直接用系统模拟的方法画出信号流图。

解： 1)直接形式

$$H(s)=\frac{s^2+2s}{s^3+8s^2+19s+12}=\frac{s^{-1}+2s^{-2}}{1-(-8s^{-1}-19s^{-2}-12s^{-3})}$$

画出直接形式模拟信号流图如图 9.27 所示。

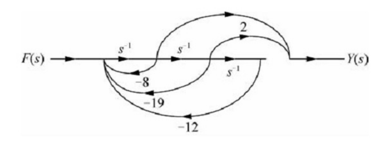


图 9.27　直接形式模拟信号流图

2) 级联形式

$$H(s)=\frac{s^2+2s}{s^3+8s^2+19s+12}=\frac{s}{(s+1)}\cdot\frac{s+2}{(s+3)(s+4)}=H_1(s)H_2(s)$$





系统可以分解成一阶系统 $H_1(s)$ 和二阶系统 $H_2(s)$ 的级联

$$H_1(s) = \frac{s}{s+1} = \frac{1}{1-(-s^{-1})}$$

$$H_2(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)} = \frac{s^{-1}+2s^{-2}}{1-(-7s^{-1}-12s^{-2})}$$

分别画出子系统 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 模拟信号流图如图 9.28 所示。

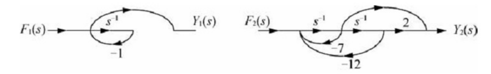


图 9.28　子系统 $H_1(s)$和 $H_2(s)$模拟信号流图

将两个子系统级联，就得到系统模拟的级联信号流图，如图 9.29 所示。

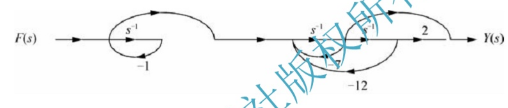


图 9.29　系统模拟的级联信号流图

3） 并联形式

将两个子系统 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 并联起来，就得到系统模拟的并联信号流图，如图 9.30 所示。

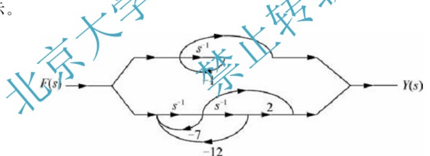


图 9.30　系统模拟的并联信号流图

9.5　系统函数与系统的稳定性

9.5.1　系统函数与系统的零极点

系统函数 $H(s)$ 是线性时不变系统的重要概念，由于 $H(s)=\dfrac{Y(s)}{F(s)}$，它反映了系统的输入信号与输出响应之间的关系。同时 $H(s)=\mathrm{LT}[h(t)]$ 又是系统冲激响应的拉普拉斯变

换，能够反映系统本身的特性，尤其是系统传递函数 $H(s)$ 的零极点在 S 平面上的位置分布与许多性质以及系统的频率响应等均有关。下面简单介绍一下系统的零极点。

n 阶连续时间系统的微分方程为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t) \tag{9-51}$$

因此，其系统函数可以写成

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \tag{9-52}$$

式中，$n \geqslant m$，$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$，$b_j(j=0,1,2,\cdots,m)$ 为实常数。

由此可见，线性系统的系统函数是以多项式之比的形式出现的。将上式给出的系统函数的分子、分母进行因式分解，可进一步得到

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = H_0 \frac{\prod_{j=0}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=0}^{n}(s-p_i)} \tag{9-53}$$

其中：H_0 为系数，$B(s)$ 和 $A(s)$ 是 s 的有理多项式。

$B(s)=0$ 的根 $z_j(j=0,1,2,\cdots,m)$ 称为 $H(s)$ 的零点，在零极点图上用“○”来表示。

$A(s)=0$ 的根 $p_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 称为 $H(s)$ 的极点，在零极点图上用“×”来表示。

【知识要点提醒】 $B(s)$ 和 $A(s)$ 的系数为实数，而 $H(s)$ 的极点和零点可能为实数，也可能为虚数或复数，当极点或零点为虚数或复数时，则必然是共轭成对出现的。若极点或零点为实数，则位于复平面的实轴上；若极点或零点为虚数，则位于复平面的虚轴上，并且关于坐标原点对称；若极点或零点为复数，则位于复平面的实轴和虚轴之外，且关于实轴对称。

【例 9.14】 某线性时不变系统的系统传递函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{s^2(s-2)}{(s+3)(s^2+2s+2)} = \frac{s^2(s-2)}{(s+3)(s+1+\mathrm{j})(s+1-j)}$$

画出该系统的零、极点图。

【解题思路与技巧】 写出零、极点表达式，直接画出位置图。

解： 由 $H(s)$ 可以看出，系统有两个零点 $z_1=0$（二阶），$z_1=2$，有三个极点 $p_1=-3$，$p_2=-1-\mathrm{j}$，$p_3=-1+\mathrm{j}$，由此可画出系统的零极点图如图 9.31 所示。

【例 9.15】 系统的零极点分布如图 9.32 所示，当 $h(0)=-\dfrac{1}{2}$ 时，写出系统的传递函数 $H(s)$。

【解题思路与技巧】 首先根据零极点位置图，写出传递函数 $H(s)$ 的表达式，然后由初值定理确定系数。



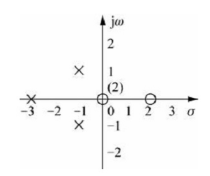


图 9.31　例 9.14 的零极点图

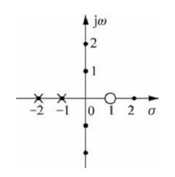


图 9.32　例 9.15 题图

解：由零、极点位置图，可以写出传递函数表达式

$$H(s)=\frac{A(s-1)}{(s+1)(s+2)}$$

由初值定理，可得

$$h(0_+)=\lim_{s\to\infty}sH(s)=\lim_{s\to\infty}s\frac{A(s-1)}{(s+1)(s+2)}=A=-\frac{1}{2}$$

可得

$$A=-\frac{1}{2}$$

所以有

$$H(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

【例 9.16】 系统的零极点分布如图 9.33 所示，当 $H(\infty)=5$ 时，写出系统的传递函数 $H(s)$。

【解题思路与技巧】 首先根据零极点位置图，写出传递函数 $H(s)$ 的表达式，然后由 $H(\infty)=5$ 确定其系数。

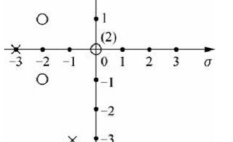


图 9.33　例 9.16 题图

解：由系统的零极点图可以写出零极点表达式

$z_1=0\quad z_2=-2+\mathrm{j}\qquad z_3=-2-\mathrm{j}$

$p_1=-3\quad p_2=-1+\mathrm{j}3\quad p_3=-1-\mathrm{j}3$

写出系统传递函数

$$H(s)=\frac{Ks(s+2-\mathrm{j})(s+2+\mathrm{j})}{(s+3)(s+1-\mathrm{j}3)(s+1+\mathrm{j}3)}=K\frac{s(s^2+4s+5)}{(s+3)(s^2+2s+10)}$$

由于 $H(\infty)=5$，可得 $\lim\limits_{s\to\infty}H(s)=K=5$，即 $K=5$

所以有

$$H(s)=\frac{5s(s^2+4s+5)}{(s+3)(s^2+2s+10)}$$

【例 9.17】 已知系统传递函数 $H(s)$ 的零点位于 $s=-\alpha$ 处，极点位于 $s=-3$ 处，且 $H(\infty)=1$。在该系统的阶跃响应中，包含一项为 Ce^{-3t}，若 α 从 0 变到 3，讨论系数 C 如何



变化。

【解题思路与技巧】 首先写出零极点位置表达式，然后由 $H(\infty)=1$ 确定传递函数 $H(s)$ 的系数。最后求出阶跃响应，确定系数 C 的变化范围。

解：由题意

$$H(s)=K\frac{s+\alpha}{s+3}$$

由于 $H(\infty)=1$，可得 $\lim\limits_{s\to\infty}H(s)=K=1$，即 $K=1$

所以有

$$H(s)=\frac{s+\alpha}{s+3}$$

阶跃响应

$$G(s)=\frac{1}{s}H(s)=\frac{1}{s}\frac{s+\alpha}{s+3}=\frac{\alpha}{3s}-\frac{\alpha-3}{3}\frac{1}{s+1}$$

求拉普拉斯逆变换

$$g(t)=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha-3}{3}e^{-t}\right)u(t)$$

由题可知

$$C=\frac{\alpha-3}{3}\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 3$$

即有

$$-1\leqslant C\leqslant 0$$

9.5.2 $H(s)$与系统的稳定性

系统的稳定性是系统分析与设计中的一个重要指标，实际系统一般都工作在稳定的状态。

1. 稳定系统

一个连续时间系统，若对任意的有界输入产生的零状态响应也是有界的，即有界输入有界输出(BIBO)系统，则该系统为稳定系统。也就是说，对于任意有限正实数 M 和 N，若在 $|f(t)|\leqslant M$ 条件下，存在 $|y(t)|\leqslant N$，则系统是稳定的。

系统稳定性的判别有几种方法。

2. 系统稳定的充分必要条件

【知识要点提醒】 设 M 为有限正实数，系统稳定的充分必要条件是满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\mathrm{d}t<\infty \tag{9-54}$$

即系统稳定的充分必要条件是系统冲激响应 $h(t)$绝对可积。



3. 用 $H(s)$的极点位置判断系统稳定性

(1) 若系统函数 $H(s)$ 的全部极点都在 S 左半平面，则可以满足 $\lim_{t\to\infty}[h(t)]=0$，系统是稳定的。

(2) 若 $H(s)$ 的极点落在 S 右半平面，或在虚轴上具有二阶以上的极点，则系统是不稳定的。

(3) 若 $H(s)$ 的极点落在 S 平面虚轴上，且只有一阶，则在足够长时间以后，$h(t)$ 趋于一个非零的数值或形成一个等幅振荡，这种情况称为临界稳定。

4. 罗斯-霍尔维兹准则(R－H 准则)

对于复杂的高阶系统，求出系统传递函数的零极点非常困难，此时可以通过罗斯-霍尔维兹准则来判断系统是否稳定。具体方法如下。

1) 霍尔维兹多项式

设 n 阶线性连续时间系统的系统函数为

$$H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}b_is^i}{\sum_{j=0}^{n}a_js^j} \tag{9-55}$$

式中，$m<n$，a_i，b_j 都是实常数，$H(s)$ 的分母多项式(特征方程)为

$$A(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0 \tag{9-56}$$

若 $H(s)$ 的极点 $A(s)=0$ 的根全部落在 S 左半平面，则多项式 $A(s)$ 称为霍尔维兹多项式。

【知识要点提醒】 $A(s)$ 为霍尔维兹多项式的必要条件是：$A(s)$ 的各项系数 a_i 都不等于 0，且 a_i 全部为正实数或全部为负实数，即所有 a_i 必须同符号且缺一不可。

显然，不满足霍尔维兹多项式的必要条件的系统是不稳定的。

如果 $A(s)$ 既满足霍尔维兹多项式必要条件，又满足霍尔维兹多项式的充分条件，说明该多项式是霍尔维兹多项式，则系统是稳定的。

需要注意：对于二阶系统，满足霍尔维兹多项式的必要条件一般也满足霍尔维兹多项式的充分条件，即系统是稳定的。

2) 罗斯判据

如果 $A(s)$ 满足霍尔维兹多项式的必要条件，则需要通过罗斯-霍尔维茨准则(R－H 准则)来判断系统是否满足霍尔维兹多项式的充分条件，即系统是否稳定。

罗斯-霍尔维茨准则包括两部分：其一是罗斯阵列，其二是罗斯判据。

罗斯阵列是由 $A(s)$ 的系数 a_i 构成的列表，具体组成如下：

$$\begin{array}{l|llll}
\text{第一行 } s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
\text{第二行 } s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
\text{第三行 } s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\
\text{第四行 } s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\
\text{第五行 } s^{n-4} & d_{n-1} & d_{n-3} & d_{n-5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\text{第 } n+1 \text{ 行 } s^0 & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}$$

其中，罗斯矩阵前两行由 $A(s)$ 多项式的系数构成。第一行由最高次项系数 a_i 逐次递减二阶的系数得到，其余排在第二行、第三行以后的系数按以下规律计算。

依此类推，直至最后一行只剩下一项不为零，共得 $n+1$ 行。

$$b_{n-1}=-\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3}\end{vmatrix} \qquad b_{n-3}=-\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5}\end{vmatrix} \quad \cdots$$

$$c_{n-1}=-\frac{1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3}\end{vmatrix} \qquad c_{n-3}=-\frac{1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5}\end{vmatrix} \quad \cdots$$

$$d_{n-1}=-\frac{1}{c_{n-1}}\begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} \\ c_{n-1} & c_{n-3}\end{vmatrix} \qquad d_{n-3}=-\frac{1}{c_{n-1}}\begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-5} \\ c_{n-1} & c_{n-5}\end{vmatrix} \quad \cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

【知识要点提醒】 罗斯判据(罗斯准则)指出：多项式 $A(s)$ 为霍尔维兹多项式的充分必要条件是罗斯阵列中第一列元素全为正值。

如果第一列 $a_n, a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1}, e_{n-1}, \cdots$ 各元素数字有符号不相同，则符号改变的次数就是方程具有正实部根的数目。

【例 9.18】 已知系统的系统函数 $H(s)$ 如下，试判断是否为稳定系统？

(1) $H_1(s)=\dfrac{s^2+3s+2}{s^3+4s^2-3s+2}$ (2) $H_2(s)=\dfrac{s^2+s+2}{2s^3+7s+9}$

(3) $H_1(s)=\dfrac{s^2+4s+2}{s^3+2s^2+5s+2}$

【解题思路与技巧】 首先判断分母多项式是否满足霍尔维兹多项式的必要条件，若不满足，则系统是不稳定的，若满足，还需要用罗斯矩阵和罗斯判据来判断系统的稳定条件。

解： (1) 分母有负系数，所以为非稳定系统。

(2) 分母多项式 $D(s)$ 中有缺项，所以不是稳定系统。

(3) 分母多项式 $D(s)$ 满足稳定系统的必要条件，是否稳定还需进一步分解检验。

$$D(S)=s^3+2s^2+5s+2=(s^2-s+2)(3s+4)$$

特征方程满足霍尔维兹多项式的必要条件，但还不能判断系统是否稳定，还需建立罗斯矩阵。



$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ b_3 & b_0 \\ c_3 & c_0 \end{vmatrix}$$

根据罗斯矩阵，求得参数 b_3，b_0，c_3，c_3

$$b_3 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad b_0 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_3 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad c_0 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

因此，罗斯矩阵可以写成

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

由罗斯判据可知，第一列均为正值，故系统是稳定的。

【例 9.19】 连续时间系统框图如图 9.34 所示，其中 $H_1(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$，问：当 K 为何值时，系统是稳定的？

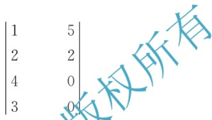


图 9.34 例 9.19 题图

【解题思路与技巧】 先求出框图的系统传递函数 $H(s)$，然后判断分母多项式是否满足霍尔维兹多项式的必要条件，若不满足，则系统是不稳定的，若满足，还需要用罗斯矩阵和罗斯判据来判断系统的稳定条件。

解：

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1+H_1(s)} = \frac{K}{s^3+3s^2+2s+K}$$

由罗斯矩阵，可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & K \\ \left(2-\dfrac{K}{3}\right) & 0 \\ K & 0 \end{vmatrix}$$

根据满足罗斯判据，罗斯矩阵第 1 列大于 0，有

$$\left(2-\frac{K}{3}\right) > 0 \quad 和 \quad K > 0$$

可得，当 $0 < K < 6$ 时，系统稳定。

本章知识要点

1. 连续时间系统的零状态响应

1）基本信号 e^{st} 激励下的零状态响应

$$y_{zs}(t)=e^{st}\int_{0_-}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau=e^{st}H(s)$$

2）一般信号 $f(t)$ 激励下的零状态响应

$$Y_{zs}(s)=LT[y_{zs}(t)]=F(s)H(s)$$

2. 利用拉普拉斯变换求解微分方程

对微分方程两边求拉普拉斯变换。

3. 利用拉普拉斯变换进行电路网络分析

1）电阻元件模型

$$V_R(s)=RI_R(s)$$

2）电容元件模型

$$U_C(s)=\frac{u_C(0_-)}{s}+\frac{1}{sC}I_C(d)\quad 或\quad I_C(s)=sCU(s)-Cu_C(0_-)$$

3）电感元件模型

$$U_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0_-)\quad 或\quad I_L(s)=\frac{1}{sL}U_L(s)-\frac{i_L(0_-)}{s}$$

4. 连续时间系统信号流图

1）连续时间系统的框图表示

2）信号流图的基本概念

画信号流图的要求。

3）梅森公式

$$H(s)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}T_k(s)\Delta_k(s)}{\Delta(s)}$$

如果连接输入输出的前向通路与所有回路都有接触且各回路都有接触，则 $\Delta_k(s)=1$，梅森公式可以简化为

$$H(s)=\frac{前向通路增益之和}{1-所有回路增益之和}$$



5. 系统的模拟

直接型、级联型和并联型。

6. 系统函数 $H(s)$ 与系统的零极点

由系统函数 $H(s)$ 画零极点图。

7. 系统的稳定性

1）系统稳定的充分必要条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \mathrm{d}t < \infty$$

2）用 $H(s)$ 的极点位置判断系统稳定性

若系统函数 $H(s)$ 的全部极点都在 s 左半平面，则可以满足 $\lim\limits_{t\to\infty}[h(t)] = 0$，系统是稳定的。

3）罗斯-霍尔维兹准则(R－H 准则)

(1) $A(s)$ 为霍尔维兹多项式的必要条件是：$A(s)$ 的各项系数 a_i 都不等于 0，且 a_i 全部为正实数或全部为负实数，即所有 a_i 必须同符号且缺一不可。

(2) 罗斯判据

罗斯判据(罗斯准则)指出：多项式 $A(s)$ 为霍尔维兹多项式的充分必要条件是罗斯阵列中第一列元素全为正值。



习题 9

9.1 用拉氏变换分析法求解下列微分方程。

(1) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t) \quad y(0_-) = y'(0_-) = 0, f(t) = u(t)$

(2) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = f'(t) + f(t) \quad y(0_-) = 2, y'(0_-) = 1, f(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$

(3) $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3f'(t) + f(t) \quad y(0_-) = 1, y'(0_-) = -1, f(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$

9.2 设某因果 LTI 系统的微分方程如下

$$y''(t) + \frac{3}{2}y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = f(t)$$

输入信号 $f(t) = 5\mathrm{e}^{-3t}u(t)$，初始条件 $y(0_-) = 1, y'(0_-) = 0$

求：(1) 系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。

(2) 系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

(3) 系统函数 $H(s)$。

(4) 系统的全响应 $y(t)$。

9.3　已知LTI系统的微分方程如下

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2f'(t)+8f(t)$$

激励信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，初始状态 $y(0_-)=3, y'(0_-)=2$

求：(1) 系统的传递函数 $H(s)$。

(2) 系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。

(3) 系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

(4) 系统的全响应 $y(t)$。

9.4　图9.35所示电路中，$L=2\mathrm{H}, C=0.1\mathrm{F}, R=10\Omega$。

(1) 写出电压转移函数。

(2) 画出 s 平面零、极点分布。

(3) 求单位冲激。

9.5　图9.36所示电路，若以电压 $u_L(t)$ 作为输出，试求其系统函数和冲激响应。

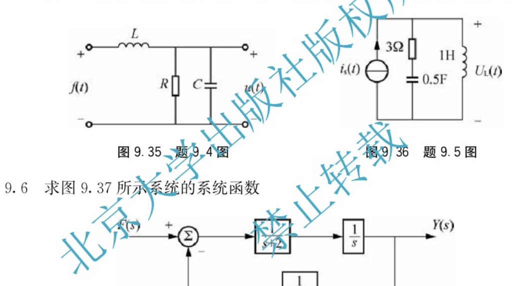


图9.35　题9.4图　　图9.36　题9.5图

9.6　求图9.37所示系统的系统函数

图9.37　题9.6图

9.7　图9.38所示系统由三个子系统组成，各子系统的冲激响应或系统函数分别为

$$h_1(t)=u(t),\quad H_2(s)=\frac{1}{s+1},\quad H_3(s)=\frac{1}{s+2}$$

求总系统的冲激响应。

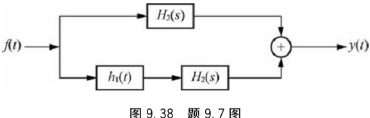


图9.38　题9.7图



9.8　电路如图 9.39(a)所示，电路中 $R_1=1\text{k}\Omega, R_2=5\text{k}\Omega, C=200\mu\text{F}$，输入信号如图 9.39(b)所示，试求 $u_o(t)$ 的稳态响应。

9.9　电路如图 9.39(a)所示，电路中 $R_1=1\text{k}\Omega, R_2=5\text{k}\Omega, C=200\mu\text{F}$，输入信号如图 9.40 所示，试求 $u_o(t)$ 的稳态响应。

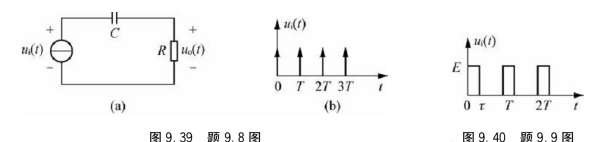


图 9.39　题 9.8 图　　　图 9.40　题 9.9 图

9.10　连续时间系统的信号流图如图 9.41 所示，写出系统传递函数 $H(s)$。

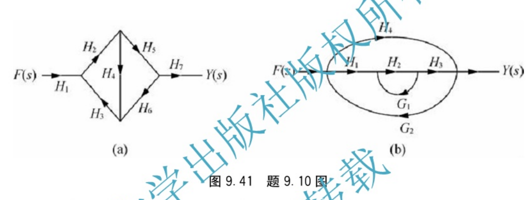


图 9.41　题 9.10 图

9.11　用梅森公式求图 9.42 所示系统的系统函数 $H(s)$。

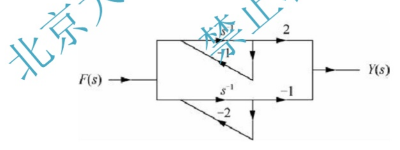


图 9.42　题 9.11 图

9.12　连续时间系统传递函数如下，画出系统的信号流图。

(1) $H(s)=\dfrac{s+2}{(s+3)(s+4)}$　　(2) $H(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{(s+2)(s^2+3s+4)}$

(3) $H(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{s(s^2+5s+6)}$　　(4) $H(s)=\dfrac{s^3}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$

9.13　已知系统的零、极点分布如图 9.43 所示，且 $h(\infty)=1$，写出系统的传递函数 $H(s)$。

9.14　已知系统的零、极点分布如图 9.44 所示，且 $h(0_+)=1$，写出系统的传递函数 $H(s)$。

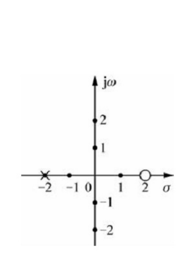


图 9.43　题 9.13 图

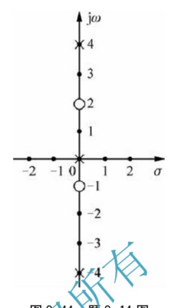


图 9.44　题 9.14 图

9.15　已知系统的系统函数 $H(s)$ 如下，试判断是否为稳定系统？

(1) $H(s)=\dfrac{s-1}{s^2+3s+2}$　　(2) $H(s)=\dfrac{s^2+1}{s^4+3s^3+2s^2+s+1}$

(3) $H(s)=\dfrac{s(s^2-1)}{s^4+2s^3+3s^2+2s+1}$　　(4) $H(s)=\dfrac{s+1}{s^4+2s^2+3s+2}$

9.16　系统框图如图 9.45 所示，若使系统稳定，确定 K 的取值范围。

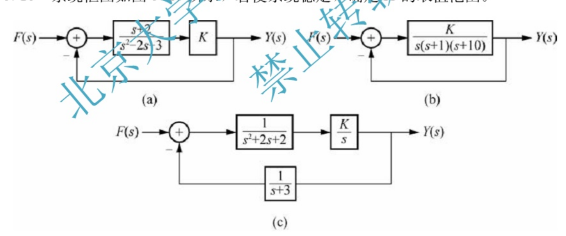
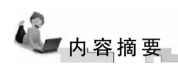


图 9.45　题 9.16 图

第10章

离散时间信号与系统的 Z 域分析



内容摘要

本章主要介绍 Z 变换的基本概念和性质，Z 逆变换，离散时间系统的 Z 域分析、离散时间系统的频域响应及离散时间系统的稳定性。

教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识	工程应用方向
双边 Z 变换	熟悉双边 Z 变换定义 熟悉双边 Z 变换的收敛域	离散时间信号	离散 Z 域分析
单边 Z 变换	熟悉单边 Z 变换定义及收敛域 掌握单边 Z 变换的性质 掌握单边 Z 逆变换	离散时间信号	离散 Z 域分析
离散时间系统的 Z 域分析	了解离散时间系统的 Z 域分析 掌握离散时间系统的频域响应 熟悉时间系统的稳定性	离散时间系统	离散 Z 域分析应用



教学目标与要求

熟悉双边 Z 变换及收敛域。

掌握单边 Z 变换及收敛域。

掌握单边 Z 变换的性质。

掌握单边 Z 逆变换

掌握离散时间信号与系统的 Z 域分析。

与线性连续时间信号与系统的 S 域变换相对应，线性离散时间信号与系统也可以用变换域法进行分析，就是 Z 变换域分析法。Z 变换可用于研究范围更广泛的离散时间信号与系统。

如果把离散时间信号看成连续时间信号的抽样值序列，则 Z 变换可由拉普拉斯变换引入。因此，离散时间信号与系统的 Z 域分析和连续时间信号与系统的复频域分析有许多相似之处。通过 Z 变换，将描述离散时间信号与系统的差分方程变成代数方程，可以比较方便地分析系统的响应、系统的频域特性和系统的稳定性，将此称为 Z 域分析。

10.1 Z 变 换

10.1.1 从拉普拉斯变换到 Z 变换

连续时间信号与系统同离散时间信号与系统的对应关系如图 10.1 所示。

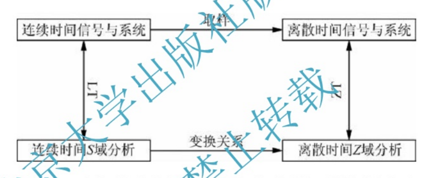


图 10.1 连续时间信号与系统和离散时间信号与系统的对应关系

由图 10.1 可以看出，从连续时间信号与系统到离散时间信号与系统是通过取样得到的，同样，连续时间信号与系统的 S 域分析到离散时间信号与系统的 Z 变换同样也可以通过一定的变换关系来确定。这种变换关系可以通过连续时间到离散时间的取样导出。下面分析如何从拉普拉斯变换过渡到 Z 变换。

设连续时间信号 $f(t)$，每隔时间 T 采样一次，由采样原理得到采样信号 $f_s(t)$ 为

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \tag{10-1}$$

两边同时取双边拉普拉斯变换，考虑到 $\mathrm{LT}[\delta(t-nT)] = \mathrm{e}^{-nT_s}$，得到抽样信号 $f_s(t)$ 的双边拉普拉斯变换为

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\mathrm{e}^{-nT_s} \tag{10-2}$$

令 $z = \mathrm{e}^{sT}, F_s(s) = F(z)$，可得

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)z^{-n} \tag{10-3}$$



因为 T 为抽样间隔，是常数，所以通常用 $f(n)$ 表示 $f(nT)$。于是，式(10-3)可写为

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n} \tag{10-4}$$

上式称为序列 $f(n)$ 的双边 Z 变换。

由此可见，连续时间信号与系统拉普拉斯变换与离散时间信号与系统 Z 变换的关系为

$$F(z)\big|_{z=e^{sT}}=F_s(s) \tag{10-5}$$

复变量 z 与 s 的关系为

$$\left.\begin{aligned}z&=e^{sT}\\ s&=\frac{1}{T}\ln z\end{aligned}\right\} \tag{10-6}$$

10.1.2　双边 Z 变换及收敛域

1. 双边 Z 变换的定义

对于离散序列 $f(n)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，z 为复变量，则函数

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n} \tag{10-7}$$

称为序列 $f(n)$ 的双边 Z 变换，记为 $F(z)=\mathrm{ZT}[f(n)]$。$F(z)$ 又称为 $f(n)$ 的象函数，$f(n)$ 称为 $F(z)$ 的原函数。为了表示方便，我们将 $f(n)$ 与 $F(z)$ 之间的关系简记为

$$f(n)\xleftrightarrow{\mathrm{ZT}}F(z)$$

2. 双边 Z 变换的收敛域

由 Z 变换定义知，序列 $f(n)$ 的双边 Z 变换为一关于 z 的无穷级数，因此存在级数是否收敛的问题。只有当式(10-7)的级数收敛时，$F(z)$ 才存在。z 为复变量，显然 $F(z)$ 存在或级数收敛的充分条件是：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)z^{-n}|=M<\infty \tag{10-8}$$

满足式(10-8)的 z 的取值区域称为 $F(z)$ 的收敛域(ROC)。显然，$F(z)$ 的收敛域一般用环状域表示，即

$$R_-<|z|<R_+$$

令 $z=re^{j\omega}$，得 $R_-<r<R_+$，收敛域是分别以 R_- 和 R_+ 为半径的圆形成的环状域。R_- 和 R_+ 称为收敛半径，当然，R_- 可以小到零，R_+ 可以大到无穷大。

下面通过举例讨论双边 Z 变换的计算与收敛域。

【例 10.1】 已知有限长序列 $f(n)=u(n+2)-u(n-3)$，求 $f(n)$ 的双边 Z 变换及其收敛域。

【解题思路与技巧】 对于序列点数较长的，直接用定义求和。若序列点数较少，可用

展开式展开成 z^n 和 z^{-n} 求解，本题只有 6 个点，用展开式方法求解。

解 由 Z 变换定义，$f(n)$ 的双边 Z 变换为

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n}=\sum_{n=-2}^{3}f(n)z^{-n}=z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}$$

上式为有限项级数求和，只有当每一项都不为无穷大时，级数才收敛。显然，收敛域为 $0<|z|\leqslant\infty$，所以

$$F(z)=z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}\quad 0<|z|\leqslant\infty$$

【例 10.2】 已知无限长因果序列 $f(n)=a^nu(n)$，求 $f(n)$ 的双边 Z 变换及其收敛域。

【解题思路与技巧】 本题是无穷多个点，直接用 Z 变换求解。

解：由 Z 变换定义，$f(n)$ 的双边 Z 变换为

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^nu(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n$$

由 Z 变换收敛条件，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)z^{-n}|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{a}{z}\right|^n$$

显然收敛域为 $\left|\frac{a}{z}\right|<1$，即 $|z|>|a|$。

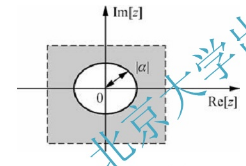


图 10.2 例 10.2 收敛域

所以

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\frac{z}{z-a}\quad |z|>|a|$$

$F(z)$ 的收敛域为复平面上半径为 $|a|$ 的圆外区域，如图 10.2 所示。

【例 10.3】 已知无限长反因果 $f(n)=-a^nu(-n-1)$ 序列，求 $f(n)$ 的双边 Z 变换及其收敛域。

【解题思路与技巧】 本题是无穷多个点，直接用 Z 变换求解，注意本题是反因果序列。

解：由 Z 变换定义，$f(n)$ 的双边 Z 变换为

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[-a^nu(-n-1)]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}-\left(\frac{a}{z}\right)^n$$

由 Z 变换收敛条件，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)z^{-n}|=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left|\frac{a}{z}\right|^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a}{z}\right|^{-n}$$

显然收敛域为 $\left|\frac{a}{z}\right|^{-1}<1$，即 $|z|<|a|$。

所以



$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}-\left(\frac{a}{z}\right)^{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^{-n}=-\frac{\left(\frac{a}{z}\right)^{-1}}{1-\left(\frac{a}{z}\right)^{-1}}=\frac{z}{z-a}\quad |z|<|a|$$

$F(z)$ 的收敛域为复平面上半径为 $|a|$ 的圆内区域，如图 10.3 所示。

【知识要点提醒】 从例 10.2 和例 10.3 的结果中可以看出，两个序列虽然不同，但它们的双边 Z 变换的结果是一致的，只是它们的收敛域不同。这表明，根据象函数 $F(z)$ 并不能唯一确定原函数 $f(n)$，只有知道象函数 $F(z)$ 及收敛域，才能唯一地确定原函数 $f(n)$。

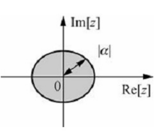


图 10.3　例 10.3 收敛域

【例 10.4】 已知无限长双边序列 $f(n)=a^nu(n0+b^nu(-n-1)$，式中 $|a|<|b|$，求 $f(n)$ 的双边 Z 变换及其收敛域。

【解题思路与技巧】 本题是因果序列与反因果序列，是例 10.2 和例 10.3 之和。

解：根据例 10.2 和例 10.3 的结果可知

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^{n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{b}{z}\right)^{n}=\frac{z}{z-a}-\frac{z}{z-b}=\frac{(a-b)z}{(z-a)(z-b)}\quad |a|<|z|<|b|$$

$F(z)$ 的收敛域为一环状区域，该环状区域位于半径为 $|a|$ 和半径为 $|b|$ 的两个圆之间，如图 10.4 所示。

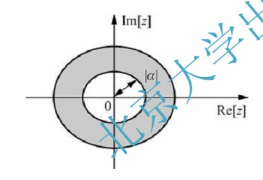


图 10.4　例 10.4 收敛域

显然在例 10.4 中，若 $|a|\geqslant|b|$，则序列不存在 Z 变换。

【知识要点提醒】 由以上讨论可知，双边 Z 变换的收敛域有以下特点。

(1) 有限长双边序列的双边 Z 变换的收敛域为 $0<|z|<\infty$；有限长因果序列双边 Z 变换的收敛域为 $|z|>0$；有限长反因果序列双边 Z 变换的收敛域为 $|z|<\infty$；单位冲激序列 $\delta(n)$ 的双边 Z 变换的收敛域为整个 Z 复平面。

(2) 无限长因果序列双边 Z 变换的收敛域为 $|z|>|z_0|$，z_0 为复数、虚数或实数，即收敛域为半径为 $|z_0|$ 的圆外区域。

(3) 无限长反因果序列双边 Z 变换的收敛域为 $|z|<|z_0|$，即收敛域为半径为 $|z_0|$ 的圆内区域。

(4) 无限长双边序列的双边 Z 变换的收敛域为 $|z_1|<|z|<|z_2|$，即收敛域为以 $|z_1|$ 为半径和以 $|z_2|$ 为半径的两个圆之间的环状区域。

(5) 不同序列的双边 Z 变换可能相同，即序列与其双边 Z 变换不是一一对应的。序列的双边 Z 变换连同收敛域一起与序列才是一一对应的。

10.1.3 常用序列的双边 Z 变换

1. $f(n)=\delta(n)$

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1 \quad 0\leqslant|z|\leqslant\infty \tag{10-9}$$

2. $f(n)=\delta(n\pm m)$，m 为正整数

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n\pm m)z^{-n}=z^{\pm m} \quad |z|>0 \tag{10-10}$$

3. $f(n)=u(n)$

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)z^{-n}=\frac{z}{z-1} \quad |z|>1 \tag{10-11}$$

4. $f(n)=-u(-n-1)$

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[-u(-n-1)]z^{-n}=\frac{z}{z-1} \quad |z|<1 \tag{10-12}$$

5. $f(n)=a^n u(n)$

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n u(n)z^{-n}=\frac{z}{z-a} \quad |z|>|a| \tag{10-13}$$

6. $f(n)=-a^n u(-n-1)$

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[-a^n u(-n-1)]z^{-n}=\frac{z}{z-a} \quad |z|<|a| \tag{10-14}$$

10.2 单边 Z 变换

10.2.1 单边 Z 变换及收敛域

在实际应用中，经常遇到的是因果信号与系统，即当 $n<0$ 时，$f(n)$ 的值为零，因果序列的双边 Z 变换等于单边 Z 变换。下面讨论单边 Z 变换及其收敛域。



1. 单边 Z 变换的定义

【知识要点提醒】 对于离散时间序列 $f(n)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，将函数

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n} \tag{10-15}$$

称为序列 $f(n)$ 的单边 Z 变换，记为 $F(z)=\mathrm{ZT}[f(n)]$。

为了表示方便，将 $f(n)$ 与 $F(z)$ 之间的关系简记为

$$f(n)\xleftrightarrow{\mathrm{ZT}}F(z)$$

由此可以看出，单边 Z 变换的求和下限为 $n=0$。

2. 单边 Z 变换的收敛域

与序列的双边 Z 变换类似，序列的单边 Z 变换也有收敛域问题。序列 $f(n)$ 的单边 Z 变换存在，使式(10-15)的幂级数收敛的充分条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f(n)z^{-n}|<\infty \tag{10-16}$$

单边 Z 变换的收敛域归纳如下。

(1) 单边 Z 变换的收敛域为 $|z|>|z_0|$，收敛域为半径为 $|z_0|$ 的圆外区域；有限长因果序列单边 Z 变换的收敛域为 $|z|>0$；单位冲激序列 $\delta(n)$ 的单边 Z 变换的收敛域为整个 Z 复平面。

(2) 对单边 Z 变换而言，其序列与变换式是一一对应，同时也有唯一的收敛域。因此，因果信号 $f(n)$ 与其单边 Z 变换 $F(z)$ 一一对应，今后不再强调单边 Z 变换的收敛域。

10.2.2　常用序列的单边 Z 变换

1. $f(n)=\delta(n)$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1\qquad|z|>0 \tag{10-17}$$

2. $f(n)=u(n)$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)z^{-n}=\frac{z}{z-1}\qquad|z|>1 \tag{10-18}$$

3. $f(n)=a^nu(n)$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^nu(n)z^{-n}=\frac{z}{z-a}\qquad|z|>|a| \tag{10-19}$$

常用 Z 变换见表 10-1。

表 10-1 常用 Z 变换

序号	$f(n)$	$F(z)$	收敛域
1	$\delta(n)$	1	全 Z 平面
2	$\delta(n-m), m>0$	z^{-m}	$\|z\|>0$
3	$\delta(n-m), m<0$	z^{m}	$\|z\|<\infty$
4	$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
5	$-u(-n-1)$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\|<1$
6	$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
7	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|<\|a\|$
8	$na^{n-1}u(n)$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
9	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\|z\|<\|a\|$
10	$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}u(n)$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$\|z\|>\|a\|$
11	$\frac{-n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}u(-n-1)$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$\|z\|<\|a\|$
12	$\sin(\beta n)u(n)$	$\frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$	$\|z\|>1$
13	$\cos(\beta n)u(n)$	$\frac{z^2-z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$	$\|z\|>1$

10.3 Z 变换的性质

在实际应用中，利用 Z 变换进行离散时间信号与系统的分析，除了采用 Z 变换的定义外，更多的是应用 Z 变换的性质。Z 变换的性质是离散系统 Z 域分析的基础，熟悉和掌握这些性质，对于我们研究离散时间信号与系统是非常必要的。本节将分别对双边 Z 变换和单边 Z 变换的一些重要性质加以介绍。

10.3.1 双边 Z 变换的性质

1. 线性性质

若

$$f_1(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} F_1(z) \qquad \text{ROC}=R_1$$





$$f_2(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} F_2(z) \qquad \text{ROC} = R_2$$

则

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) \xleftrightarrow{\text{FZ}} a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) \qquad \text{ROC} = \text{R}_1 \cap R_2 \qquad (10\text{-}20)$$

式中，a_1 、a_2 为任意常数。其收敛域是 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$ 收敛域的公共部分，若线性组合 $a_1F_1(z)+a_2F_2(z)$ 使 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$ 的某些零点抵消，则收敛域可能大于其交集。

【例 10.5】 已知 $f(n)=u(n)-\left(\frac{2}{5}\right)^n u(-n-1)$，求 $f(n)$ 的双边 Z 变换 $F(z)$ 及其收敛域。

【解题思路与技巧】 直接用线性性质求解。

解： 根据常用序列的双边 Z 变换式，可得

$$u(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

$$-\left(\frac{2}{5}\right)u(-n-1) \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{z}{z-\frac{5}{2}} \qquad |z|<\frac{5}{2}$$

由线性性质得

$$F(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-\frac{5}{2}}=\frac{z\left(z-\frac{7}{2}\right)}{(z-1)\left(z-\frac{5}{2}\right)} \qquad 1<\left|z<\frac{5}{2}\right|$$

【例 10.6】 已知序列 $f_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\left(\frac{3}{2}\right)^n u(-n-1)$ 和 $f_2(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)-\left(\frac{1}{2}\right)^n(n)$，求双边 Z 变换 $F_1(z)$ 、$F_2(z)$ 和 $af_1(n)+bf_2(n)$ 的 Z 变换及收敛域。

【解题思路与技巧】 方法同例 10.5。

解： 1)求 $F_1(z)$

由表 10－1 可知

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$$-\left(\frac{3}{2}\right)^n(-n-1) \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{z}{z-\frac{3}{2}} \qquad |z|<\frac{3}{2}$$

$$F_1(\text{z})=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-\frac{3}{2}}=\frac{-z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)} \qquad \frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$$

2) 求 $F_2(z)$

同理，查表 10－1，可得

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{z}{z-\frac{1}{4}} \qquad |z|>\frac{1}{4}$$

$$F_2(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{4}}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{1}{4}z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

3) $af_1(n)+bf_2(n)$ 的 Z 变换

$$af_1(n)+bf_2(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}}aF_1(z)+bF_2(z)$$

$$=a\frac{-z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)}+b\frac{-\frac{1}{4}z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\quad \frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$$

可见，收敛域仍然是 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 的交集。但是当取 $a=b$ 时

$$aF_1(z)+aF_2(z)=a\frac{-z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)}+a\frac{-\frac{1}{4}z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{-\frac{5}{4}z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)}\quad \frac{1}{4}<|z|<\frac{3}{2}$$

此时，由于在 $z=\frac{1}{2}$ 点的零点和极点相互抵消，故其收敛域扩大。

一般来讲，通常用零极点相互抵消来调整系统的特性。

2. 时移(位移)性

若

$$f(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}}F(z)\qquad \text{ROC}=\text{R}$$

则

$$f(n\pm m)\xleftrightarrow{\text{ZT}}z^{\pm m}F(z)\qquad \text{ROC}=\text{R}\tag{10-21}$$

式中，m 为正整数。

【例 10.7】 已知 $f(n)=2^n[u(n+1)-u(n-3)]$，求 $f(n)$ 的双边 Z 变换 $F(z)$ 及其收敛域。

【解题思路与技巧】 直接利用时移性质和线性性质求解。

解： 将 $f(n)$ 作如下变换

$$f(n)=2^n[u(n+1)-u(n-3)]=2^{-1}2^{n+1}u(n+1)-2^3 2^{n-3}u(n-3)$$
$$=2^{-1}f_1(n)\big|_{n=n+1}-2^3 f_1(n)\big|_{n=n-3}$$

其中 $$f_1(n)=2^n u(n)$$

由常用序列的双边 Z 变换，得

$$f_1(n)=2^n u(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}}\frac{z}{z-2}$$

根据时移性质，得



$$2^{n+1}u(n+1)\xleftrightarrow{\text{ZT}} z\frac{z}{z-2}\quad 2<|z|<\infty$$

$$2^{n-3}u(n-3)\xleftrightarrow{\text{ZT}} z^{-3}\frac{z}{z-2}=\frac{1}{z^2(z-2)}\quad |z|>2$$

根据线性性质，得

$$F(z)=\frac{1}{2}\frac{z^2}{z-2}-8\frac{1}{z^2(z-2)}=\frac{z^4-16}{2z^2(z-2)}\quad 2<|z|<\infty$$

3. Z 域尺度变换性质

若

$$f(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}} F(z)\qquad \text{ROC}=R$$

则

$$a^n f(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}} F\left(\frac{z}{a}\right)\qquad \text{ROC}=|a|R \tag{10-22}$$

式中，a 为常数，且 $a\neq 0$。式(10-22)表明，序列 $f(n)$ 乘以指数序列 a^n 相当于在 Z 域的展缩。

【例 10.8】 已知指数衰减余弦序列 $f(n)=a^n\cos(\beta n)u(n)$，$0<a<1$，求 $f(n)$ 的双边 Z 变换及其收敛域。

【解题思路与技巧】 直接利用 Z 域尺度变换性质求解。

解： 由表 10-1 可知

$$\cos(\beta n)u(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}}\frac{z^2-z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}\quad |z|>1$$

根据 Z 域尺度变换性质，得

$$a^n\cos(\beta n)u(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}}\frac{\left(\frac{z}{a}\right)^2-\frac{z}{a}\cos\beta}{\left(\frac{z}{a}\right)^2-2\frac{z}{a}\cos\beta+1}=\frac{z^2-az\cos\beta}{z^2-2az\cos\beta+a^2}\quad |z|>a$$

【例 10.9】 已知 $f(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n 3^{n+1}u(n+1)$，求 $f(n)$ 的双边 Z 变换 $F(z)$ 及其收敛域。

【解题思路与技巧】 本题可以采用分步求解。先用时移解出 $3^{n+1}u(n+1)$，然后再用尺度变换的求解方法。也可以采用先把表达式变换成 $(n+1)$ 的形式，然后用时移性质进行求解。

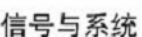
解：方法 1： 由表 10-1 可知

$$3^n u(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}}\frac{z}{z-3}$$

由时移性质

$$3^{n+1}u(n+1)\xleftrightarrow{\text{ZT}} z\frac{z}{z-3}=\frac{z^2}{z-3}\qquad 3<|z|<\infty$$

根据 Z 域尺度变换性质，得

$$F(z)=\mathrm{ZT}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}3^{n+1}u(n+1)\right]=\frac{(2z)^2}{2z-3}=\frac{4z^2}{2z-3}\quad \frac{3}{2}<|z|<\infty$$

方法2：对 $f(n)$ 信号作变形

$$f(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}3^{n+1}u(n+1)=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}3^{n+1}u(n+1)=2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}u(n+1)$$

由表 10－1 可知

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n}u(n)\overset{\mathrm{ZT}}{\longleftrightarrow}\frac{z}{z-\frac{3}{2}}=\frac{2z}{2z-3}$$

由时移性质

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}u(n+1)\overset{\mathrm{ZT}}{\longleftrightarrow}z\frac{z}{z-\frac{3}{2}}=\frac{2z^2}{2z-3}$$

因此

$$F(z)=\mathrm{ZT}\left[2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}u(n+1)\right]=\frac{4z^2}{2z-3}$$

4. 时域卷积性质

若

$$f_1(n)\overset{\mathrm{ZT}}{\longleftrightarrow}F_1(z)\qquad \mathrm{ROC}=R_1$$
$$f_2(n)\overset{\mathrm{ZT}}{\longleftrightarrow}F_2(z)\qquad \mathrm{ROC}=R_2$$

则

$$f_1(n)*f_2(n)\overset{\mathrm{ZT}}{\longleftrightarrow}F_1(z)F_2(z)\qquad \mathrm{ROC}=R_1\cap R_2 \tag{10-23}$$

式中，$F_1(z)F_2(z)$ 的收敛域为 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$ 收敛域的公共部分，但若 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$ 相乘使某些零极点相互抵消，则收敛域可以增大。

上式表明，序列时域的卷积对应于 Z 域的乘积。该性质经常在离散时间系统响应的分析中应用。如已知输入序列 $f(n)$，系统的冲激序列为 $h(n)$，则系统的零状态响应 $y(n)=f(n)*h(n)$，由时域卷积性质可得 $Y(z)=F(z)\cdot H(z)$，再求 $Y(z)$ 的逆变换可得 $y(n)$。

5. Z 域微分性质

若

$$f(n)\overset{\mathrm{ZT}}{\longleftrightarrow}F(z)\qquad \mathrm{ROC}=R$$

则

$$nf(n)\overset{\mathrm{ZT}}{\longleftrightarrow}-z\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}\qquad \mathrm{ROC}=R \tag{10-24}$$

$$n^2f(n)\overset{\mathrm{ZT}}{\longleftrightarrow}-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[-z\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}\right]\qquad \mathrm{ROC}=R \tag{10-25}$$

同理





$$n^m f(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} \left[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]^m F(z) \qquad \text{ROC}=R \tag{10-26}$$

【知识要点提醒】 注意：Z 域微分性质主要用来计算 $nf(n)$ 的 Z 变换。

【例 10.10】 求序列 $n^2u(n)$、$\frac{n(n+1)}{2}u(n+1)$ 和 $\frac{n(n-1)}{2}u(n)$ 的双边 Z 变换。

【解题思路与技巧】 本题主要利用 Z 域微分性质分步求解。

解：（1）由表 10-1 可知

$$u(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

根据 Z 域微分性质，得

$$nu(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{z}{(z-1)^2} \qquad |z|>1$$

同理

$$n^2u(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right]=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \qquad |z|>1$$

（2）由于

$$nu(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{z}{(z-1)^2}$$

应用时移性质，得

$$(n+1)u(n+1) \xleftrightarrow{\text{ZT}} z\frac{z}{(z-1)^2}$$

根据 Z 域微分性质，得

$$n(n+1)u(n+1) \xleftrightarrow{\text{ZT}} -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2}{(z-1)^2}\right]=\frac{2z^2}{(z-1)^3}$$

所以

$$\frac{n(n+1)}{2}u(n+1) \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{z^2}{(z-1)^3} \qquad |z|>1$$

（3）对信号进行拆分

$$\frac{n(n-1)}{2}u(n)=\frac{1}{2}n^2u(n)-\frac{1}{2}nu(n)$$

由前面的计算结果及线性性质，得

$$\frac{n(n-1)}{2}u(n)=\frac{1}{2}n^2u(n)-\frac{1}{2}nu(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{1}{2}\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}-\frac{z}{(z-1)^2}\right]$$

$$=\frac{z}{(z-1)^3} \qquad |z|>1$$

【例 10.11】 已知 $f(n)=n(n-1)a^{n-2}u(n)$，求 $f(n)$ 的双边 Z 变换 $F(z)$。

【解题思路与技巧】 本题可以采用 Z 域微分性质分步求解的方法，也可以采用先把表达式拆分再利用 Z 域微分性质和时移性质求解。

解：方法 1：

对信号进行拆分

$$f(n)=n(n-1)a^{n-2}u(n)=n^2a^{-2}a^nu(n)-na^{-2}a^nu(n)$$

由表 10-1 可得

$$a^nu(n)\overset{\text{ZT}}{\longleftrightarrow}\frac{z}{z-a}$$

根据 Z 域微分性质

$$na^nu(n)\overset{\text{ZT}}{\longleftrightarrow}-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z}{z-a}\right]=\frac{az}{(z-a)^2}$$

$$n^2a^nu(n)\overset{\text{ZT}}{\longleftrightarrow}-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{az}{(z-a)^2}\right]=\frac{az^2+az}{(z-a)^3}$$

因此，根据 Z 变换的线性性质

$$F(z)=a^{-2}\frac{az^2+az}{(z-a)^3}-a^{-2}\frac{az}{(z-a)^2}=\frac{2z}{(z-a)^3}$$

方法 2：

由表 10-1 和时移性质，得

$$a^{n-1}u(n-1)\overset{\text{ZT}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{z-a}$$

由 Z 域微分性质，得

$$na^{n-1}u(n-1)\overset{\text{ZT}}{\longleftrightarrow}-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z-a}\right)=\frac{z}{(z-a)^2}$$

由时移性质，得

$$(n-1)a^{n-2}u(n-2)\overset{\text{ZT}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{(z-a)^2}$$

由 Z 域微分性质，得

$$n(n-1)a^{n-2}u(n-2)\overset{\text{ZT}}{\longleftrightarrow}-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{(z-a)^2}\right)=\frac{2z}{(z-a)^3}$$

由于 $n=0$，$n=1$ 时 $n(n-1)a^{n-2}=0$，故

$$n(n-1)a^{n-2}u(n-2)=n(n-1)a^{n-2}u(n)$$

故有

$$F(z)=\frac{2z}{(z-a)^3}\quad |z|>a$$

6. Z 域积分性质

若

$$f(n)\overset{\text{ZT}}{\longleftrightarrow}F(z)\qquad \text{ROC}=R$$

则

$$\frac{f(n)}{n+m}\overset{\text{ZT}}{\longleftrightarrow}z^m\int_z^{\infty}\frac{F(\lambda)}{\lambda^{m+1}}\mathrm{d}\lambda\qquad \text{ROC}=R \tag{10-27}$$

式中，m 为整数，$m+n>0$。



若 $m=0$，$n>0$，则

$$\frac{f(n)}{n}\xleftrightarrow{\text{ZT}} z^m\int_z^{\infty}\frac{F(\lambda)}{\lambda}\mathrm{d}\lambda \qquad \text{ROC}=R \tag{10-28}$$

7. 时域反转性质

若

$$f(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}} F(z) \qquad \text{ROC}=R$$

则

$$f(-n)\xleftrightarrow{\text{ZT}} F(z^{-1}) \qquad \text{ROC}=\frac{1}{R} \tag{10-29}$$

【例 10.12】 求 $f(n)=a^n\text{sgn}(n)$，$(0<a<1)$ 的双边 Z 变换 $F(z)$。

【解题思路与技巧】 首先将 $a^n\text{sgn}(n)$ 写成因果序列和反因果序列，然后分别求出其 Z 变换，然后用线性性质求解。

解： 由于

$$f(n)=a^n\text{sgn}(n)=\begin{cases}a^nu(n) & n\geqslant 0\\ -a^{-n}u(-n-1) & n<0\end{cases}$$

由表 10-1 可知

$$a^nu(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}}\frac{z}{z-a} \qquad |z|>a$$

由时域反转性质，得

$$a^{-n}u(-n-1)\xleftrightarrow{\text{ZT}}\frac{1}{1-az} \qquad |z|<\frac{1}{a}$$

根据线性性质，得

$$F(z)=\frac{z}{z-a}-\frac{1}{1-az}=\frac{1-z^2}{(a^{-1}z-1)(1-az)} \qquad a<|z|<\frac{1}{a}$$

8. 部分和性质

若

$$f(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}} F(z) \qquad \text{ROC}=R$$

则

$$\sum_{n=-\infty}^{k}f(m)\xleftrightarrow{\text{ZT}}\frac{z}{z-1}F(z) \qquad \max(R,1) \tag{10-30}$$

该性质说明：序列 $f(n)$ 的 n 项求和的 Z 变换等于 $f(n)$ 的 Z 变换乘以 $\frac{z}{z-1}$，主要用于求解有限项合式的 Z 变换。

【例 10.13】 已知序列 $f_1(n)=\sum\limits_{n=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n a$ 为实数，$f_2(n)=a^n\sum\limits_{m=0}^{n}u(m-1)$，分别求其双边 Z 变换。

【解题思路与技巧】 直接利用部分和性质求解。

解：(1) 由于

$$f_1(n)=\sum_{n=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{m=-\infty}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^m u(m)$$

而

$$\sum_{m=-\infty}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^m u(m)\xleftrightarrow{\text{ZT}}\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\quad |z|>\frac{1}{2}$$

根据部分和性质

$$\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^m\xleftrightarrow{\text{ZT}}\frac{z}{z-1}\frac{z}{z-\frac{1}{2}}=\frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}\quad |z|>1$$

(2) 由于

$$\sum_{m=1}^{n}u(m-1)=\sum_{m=-\infty}^{n}u(m-1)$$

查表 10－1 可知

$$u(n-1)\xleftrightarrow{\text{ZT}}z^{-1}\frac{z}{z-1}=\frac{1}{z-1}\quad |z>1|$$

根据部分和性质，得

$$\sum_{m=1}^{n}u(m-1)=\sum_{m=-\infty}^{n}u(m-1)\xleftrightarrow{\text{ZT}}\frac{z}{z-1}\frac{1}{z-1}=\frac{z}{(z-1)^2}\quad |z|>1$$

根据 Z 域尺度变换性质，得

$$a^n\sum_{m=0}^{n}u(m-1)\xleftrightarrow{\text{ZT}}\frac{\frac{z}{a}}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^2}=\frac{az}{(z-a)^2}$$

9. 共轭性质

若

$$f(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}}F(z)\qquad \text{ROC}=R$$

则

$$f^*(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}}F^*(z^*)\qquad \text{ROC}=R \tag{10-31}$$

10. 初值定理

若 $n<N$ (N 为整数)时，$f(n)=0$，且

$$f(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}}F(z)\qquad a<|z|<\infty$$

则序列 $f(n)$ 的初值 $F(z)$ 为

$$f(N)=\lim_{z\to\infty}z^N F(z) \tag{10-32}$$

【知识要点提醒】 特别是，当 $N=0$ 时，



$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z) \tag{10-33}$$

11. 终值定理

若 $n<0$ 时，$f(n)=0$，且

$$f(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}}F(z) \quad a<|z|<\infty$$

则序列 $f(n)$ 的终值为

$$f(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z) \tag{10-34a}$$

或者

$$f(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) \tag{10-34b}$$

【知识要点提醒】 终值定理要求 $F(z)$ 除在 $z=1$ 有一阶极点外，其余极点全部在单位圆内，即要求 $\frac{z-1}{z}F(z)$ 的收敛域包含单位圆，这时 $f(n)$ 的终值存在。

【例 10.14】 已知 $f_1(n)=(-1)^n u(n)$，$f_2(n)=u(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$。分别求 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 的初值 $f_1(0)$ 和 $f_2(0)$，终值 $f_1(\infty)$ 和 $f_2(\infty)$。

【解题思路与技巧】 直接利用初值定理和终值定理求解，注意初值和终值定理存在的条件。

解： 1)求 $f_1(0)$

由于

$$F_1(z)=\frac{z}{z+1} \quad |z|>1$$

由初值定理

$$f_1(0)=\lim_{z\to\infty}F_1(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{z+1}=1$$

检验

$$f_1(0)=\lim_{n\to 0}f_1(n)=1$$

可见，两者计算结果相同。

2) 求 $f_2(0)$

由于

$$F_2(z)=u(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)=\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-\frac{1}{2}}=\frac{4z^2-3z}{2(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

由初值定理

$$f_2(0)=\lim_{z\to\infty}F_2(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{4z^2-3z}{2(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}=2$$

检验

$$f_2(0)=\lim_{n\to 0}f_2(n)=2$$

可见，两者计算结果相同。

3）求 $f_1(\infty)$

由于

$$F_1(z)=\frac{z}{z+1}\qquad |z|>1$$

显然，$F_1(z)$ 在 $z=-1$ 处有极点，所以 $\frac{z-1}{z}F_1(z)$ 在单位圆上不收敛，$f_1(\infty)$ 不存在，终值定理不适用。若根据终值定理求 $f_1(\infty)$，则

$$f(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F_1(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}=0$$

显然，$f_1(\infty)=0$ 的结果是错误的，因为 $f_1(n)$ 的值随 n 的增加为 1 和 -1 交替出现，$f_1(\infty)$ 的值是不确定的。

4）求 $f_2(\infty)$

由于

$$F_2(z)=\frac{4z^2-3z}{2(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

所以，$F_2(z)$ 只有两个一阶极点 $z=1$ 、$z=\frac{1}{2}$，而 $\frac{z-1}{z}F_2(z)$ 的极点为 $z=\frac{1}{2}$，收敛域为 $|z|>\frac{1}{2}$，包括单位圆。因此，根据终值定理

$$f_2(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F_1(z)=\lim_{z\to 1}\frac{4z-3}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)}=1$$

10.3.2 单边 Z 变换的性质

双边 Z 变换的许多性质同样适用于单边 Z 变换，除了收敛域不同外，双边 Z 变换的这些性质的表述形式与单边 Z 变换对应性质的表述形式完全相同。但单边 Z 变换也有它自己的特点，下面主要讨论单边 Z 变换与双边 Z 变换不同的特性。

1. 时移(位移)性质

若

$$f(n)\xleftrightarrow{\text{ZT}}F(z)\qquad \text{ROC}=R$$

则

$$f(n-1)\xleftrightarrow{\text{ZT}}z^{-1}F(z)+f(-1)\tag{10-35}$$





依此类推

$$f(n-2) \xleftrightarrow{\text{ZT}} z^{-2}F(z) + f(-2) + f(-1)z^{-1}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$f(n-m) \xleftrightarrow{\text{ZT}} z^{\pm m}F(z) + \sum_{n=0}^{m-1} f(n-m)z^{m-n}$$

【例 10.15】 若 $f(n) = (n-3)u(n)$，求其单边 Z 变换。

【解题思路与技巧】 本题主要考察 Z 变换性质的应用能力，用 Z 域微分性质和时移性质求解，需要注意的是时移信号的起点。

解：方法 1： 由于

$$u(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$$

根据 Z 域微分性质，得

$$nu(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad |z| > 1$$

根据时移性质，可得

$$(n-3)u(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} z^{-3}\frac{z}{(z-1)^2} + \sum_{n+0}^{2}(n-3)z^{-n}$$

$$= \frac{z^{-2}}{(z-1)^2} - 3 - 2z^{-1} - z^{-2} = \frac{4z-3z^2}{(z-1)^2} \quad |z| > 1$$

方法 2： 由于

$$f(n) = (n-3)u(n) = nu(n) - 3u(n)$$

所以

$$F(z) = \text{ZT}[nu(n) - 3u(n)] = \frac{z}{(z-1)^2} - 3\frac{z}{z-1} = \frac{4z-3z^2}{(z-1)^2} \quad |z| > 1$$

【例 10.16】 若 $f(n) = a^{n-2}$，求其单边 Z 变换。

【解题思路与技巧】 方法同例 10.15。

解： 由于 $f(n)$ 是非因果信号，令 $f_1(n) = a^{\mathrm{n}}$，则 $f_1(n)$ 的单边 Z 变换为

$$F_1(z) = \frac{z}{z-a}$$

根据时移性质

$$F(z) = z^{-2}F_1(z) + \sum_{n=0}^{1} a^{n-2}z^{-n}$$

$$= z^{-2}\frac{z}{z-a} + a^{-2} + a^{-1}z^{-1} = \frac{a^{-2}z}{z-a} \quad |z| > |a|$$

2. 时域卷积

若 $f_1(n)$、$f_2(n)$ 为因果序列，且

$$f_1(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} F_1(z) \quad |z| > R_1$$

$$f_2(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} F_2(z) \qquad |z|>R_2$$

则

$$f_1(n)*f_2(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} F_1(z)F_2(z) \qquad |z|>\max(R_1,R_2) \tag{10-36}$$

【知识要点提醒】 该性质需要注意的是：单边 Z 变换的时域卷积性质要求 $f_1(n)$、$f_2(n)$ 为因果序列，而双边 Z 变换时域卷积性质则无此限制。

3. 部分和

若

$$f(n) \xleftrightarrow{\text{ZT}} F(z) \qquad |z|>R$$

则

$$\sum_{m=0}^{n} f(m) \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{z}{z-1}F(z) \qquad |z|>\max(R,1) \tag{10-37}$$

Z 变换的性质见表 10－2。

【例 10.17】 已知 $f(n)=n(-1)^n\sum\limits_{m=0}^{n}a^n$，求 $f(n)$ 的单边 Z 变换 $F(z)$。

【解题思路与技巧】 利用部分和性质求解。

解： 由常用序列的单边 Z 变换表 10－2，有

$$a^n \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

根据部分和性质，得

$$\sum_{m=0}^{n} a^n \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{z}{z-1}\,\frac{z}{z-a}=\frac{z^2}{(z-1)(z-a)} \qquad |z|>\max(1,|a|)$$

根据 Z 域尺度变换性质，得

$$(-1)^n\sum_{m=0}^{n} a^n \xleftrightarrow{\text{ZT}} \frac{(-z)^2}{(-z-1)(-z-a)}=\frac{z^2}{(z+1)(z+a)} \qquad |z|>\max(1,|a|)$$

根据 Z 域微分性质，得

$$n(-1)^n\sum_{m=0}^{n} a^n \xleftrightarrow{\text{ZT}} (-z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2}{(z+1)(z+a)}\right]=\frac{-2az^2}{(z+1)^2\,(z+a)^2} \qquad |z|>\max(1,|a|)$$

即

$$F(z)=\frac{-2az^2}{(z+1)^2\,(z+a)^2} \qquad |z|>\max(1,|a|)$$

表 10－2　Z 变换的性质

序号	性质名称	信号(序列)	Z 变换
1	线性	$af_1(n)+bf_2(n)$	$aF_1(z)+bF_2(z)$ $\max(\alpha_1,\alpha_2)<\lvert z\rvert<\min(\beta_1,\beta_2)$





续表

序号	性质名称		信号(序列)	Z变换
2	位移	双边变换	$f(n\pm m)$	$z^{\pm m}F(z), a<\lvert z\rvert<\beta$
		单边变换	$f(n-m), m>0$	$z^{-m}F(z)+\sum_{n=0}^{m-1}f(n-m)z^{-n}, \lvert z\rvert<a$
			$f(n+m), m>0$	$z^{-m}F(z)+\sum_{n=0}^{m-1}f(n)z^{m-n}, \lvert z\rvert>a$
			$f(n-m)u(n-m), m>0$	$z^{-m}F(z), \lvert z\rvert>a\, z^{-m}F(z), \lvert z\rvert>a$
3	Z域乘a^n		$a^n f(n), a\neq 0$	$F\left(\frac{z}{a}\right), a\lvert a\rvert<\lvert z\rvert<\beta\lvert a\rvert$
4	Z域卷积	双边变换	$f_1(n)*f_2(n)$	$F_1(z)F_2(z)$ $\max(a_1,a_2)<\lvert z\rvert<\min(\beta_1,\beta_2)$
		单边变换	$f_2(n)*f_2(n)$	$F_1(z)F_2(z)$ $\lvert z\rvert>\max(a_1,a_2)$
5	Z域微分		$n^m f(n), m>0$	$\left[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]^m F(z)$ $a<\lvert z\rvert<\beta$
6	Z域积分		$\frac{f(n)}{n+m}$ $n+m>0$	$z^m\int_z^{\infty}F(\lambda)\lambda^{-(m+1)}\mathrm{d}\lambda$ $a<\lvert z\rvert<\lvert\beta\rvert$
7	Z域反转 (适用于双边变换)		$f(-n)$	$F(z^{-1}), \frac{1}{\beta}<\lvert z\rvert<\frac{1}{a}$
8	部分和	双边变换	$\sum_{m=-\infty}^{n}f(m)$	$\frac{z}{z-1}F(z)$ $\max(a,1)<\lvert z\rvert<\beta$
		单边变换	$\sum_{m=0}^{n}f(m)$	$\frac{z}{z-1}F(z)$ $\lvert z\rvert<\max(a,1)$
9	初值定理	双边变换	$f(N)=\lim_{z\to\infty}z^N F(z)$ $f(n)=0, n<N$	
		单边变换	$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$ $f(n)=0, n<0$	
10	终值定理		$f(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)$ $\lvert z\rvert>a, 0<a<1$ 或 $f(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$	

【小思考】 单边拉普拉斯变换和双边拉普拉斯变换的性质有何异同?



10.4　Z 逆变换

由 Z 变换$F(z)$及其收敛域求原序列 $f(n)$ 的过程称为 Z 逆变换。双边 Z 变换和单边Z 变换的求法基本相同，只是根据 $F(z)$ 的收敛域不同，求得的 $f(n)$ 序列不同。本节主要介绍双边 Z 逆变换，求双边 Z 逆变换的方法通常有：幂级数展开法，部分分式展开法、反演积分法(留数法)。

10.4.1　幂级数展开法(长除法)

若 $f(n)$ 为双边序列，可以将其分解因果序列 $f_1(n)$ 和反因果序列 $f_2(n)$ 两部分，即

$$f(n)=f_2(n)+f_1(n)=f(n)u(-n-1)+f(n)u(n)$$

根据双边 Z 变换的定义，$F(z)$ 为 z 和 z^{-1} 的幂级数，收敛域为 $R_-<|z|<R_+$，即

$$\begin{aligned}F(z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n}=\cdots+f(-1)z+f(0)z^0+f(1)z^{-1}+\cdots\\&=\sum_{n=-\infty}^{-1}f(n)z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}=F_2(z)+F_1(z)\qquad R_-<|z|<R_+\end{aligned}\tag{10-38}$$

所以，只要在给定的收敛域内，把 $F(z)$ 展成幂级数，则幂级数的系数就是序列 $f(n)$。

由于对双边序列而言，只有在给定 $F(z)$ 的同时，给出它的收敛域范围，才能唯一地确定序列 $f(n)$，因此，在利用长除法作 Z 逆变换时，要根据收敛域判断所要得到的 $f(n)$ 的性质，再展开成相应的 z 的幂级数。

【知识要点提醒】

(1) 当 $F(z)$ 的收敛域为 $|z|>R_-$ 时，则 $f(n)$ 必为右边序列(因果序列)，此时应将 $F(z)$ 展成 z 的负幂级数，为此，$F(z)$ 的分子分母应按 z 的降幂排列。

(2) 如果收敛域是 $|z|<R_+$，则 $f(n)$ 必为左边序列(反因果序列)，此时应将 $F(z)$ 展成 z 的正幂级数，为此，$F(z)$ 的分子分母应按 z 的升幂排列。

【例 10.18】　已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^2}{z^2-z-2}$，收敛域为 $|z|>2$，$|z|<1$，$1<|z|<2$。分别求其对应的原函数 $f(n)$。

【解题思路与技巧】　用长除法求逆变换需要注意 Z 变换的收敛域。

解：(1) 由于 $F(z)$ 的收敛域为 $|z|>2$，故 $f(n)$ 为因果序列，式子按 z 的降幂排列，即象函数分子、分母按 z 的降幂排列，根据多项式除法，得



$$
\begin{array}{r}
1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\cdots \\
z^2-z-2\,\overline{)\,z^2\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{z^2-z-2\qquad\qquad} \\
z+2\qquad\qquad \\
\underline{z-1-2z^{-1}\qquad} \\
3+2z^{-1}\qquad \\
\cdots\qquad\qquad
\end{array}
$$

即

$$F(z)=\frac{z^2}{z^2-z-2}=1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\cdots$$

于是得

$$n<0,\ f(n)=0$$

$$n\geqslant 0, f(0)=1, f(1)=1, f(2)=3, f(3)=5,\cdots$$

(2) 由于 $F(z)$ 的收敛域为 $|z|<1$，故 $f(n)$ 为反因果序列，式子按 z 的升幂排列，即象函数分子、分母按 z 的升幂排列，根据多项式除法，得

$$
\begin{array}{r}
-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^5+\cdots \\
-2-z+z^2\,\overline{)\,z^2\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{z^2+\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{2}z^4\qquad\qquad\qquad} \\
-\frac{1}{2}z^3+\frac{1}{2}z^4\qquad\qquad\qquad \\
\underline{-\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{4}z^5\qquad\qquad} \\
\frac{3}{4}z^4-\frac{1}{4}z^5\qquad\qquad \\
\cdots\qquad\qquad\qquad
\end{array}
$$

即

$$F(z)=\frac{z^2}{z^2-z-2}=-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^5+\cdots$$

于是得

$$n<0, f(-1)=0, f(-2)=-\frac{1}{2}, f(-3)=\frac{1}{4}, f(-4)=-\frac{3}{8}, f(-5)=\frac{5}{16},\cdots$$

$$n\geqslant 0,\ f(n)=0$$

(3) 由于 $F(z)$ 的收敛域为 $1<|z|<2$，故 $f(n)$ 为双边序列，$F(z)$ 可以表示为

$$F(z)=\frac{z^2}{z^2-z-2}=\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}\quad 1<|z|<2$$

根据给定的收敛域可得，上式第一项属于因果序列的像函数 $F_1(z)$，第二项属于反因果序列的像函数 $F_2(z)$，即

$$F_1(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}\quad |z|>1$$

$$F_2(z)=\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}\quad |z|<2$$

按照上述方法分别展开为 z^{-1} 和 z 的幂级数，得

$$F_1(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}-\frac{1}{3}z^{-3}+\cdots$$

$$F_2(z)=\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}=\cdots-\frac{1}{12}z^3-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{3}z$$

所以

$$f(n)=\left\{\cdots,-\frac{1}{12},\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{-\frac{1}{6}},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\cdots\right\}$$

10.4.2　部分分式展开法

若象函数 $F(z)$ 为 z 的有理分式，则 $F(z)$ 可以表示为

$$F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}\quad R_-<|z|<R_+ \tag{10-39}$$

式中，$a_i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$、$b_j(j=0,1,2,\cdots,m)$ 为实数。

1. 若 $m<n$，则 $F(z)$ 为真分式

用部分分式展开法求逆 Z 变换需要根据常用 Z 变换对获得，由于常用指数函数 Z 变换的形式为 $\frac{z}{z-a}$，因此一般先把 $\frac{F(z)}{z}$ 展开为部分分式，然后再乘以 z，得到以基本形式 $\frac{z}{z-a}$ 表示的 $F(z)$，再通过查表 10-1 获得。

设 $\frac{F(z)}{z}$ 为有理真分式，可以表示为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{B(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}$$

式中，$z_i(i=0,1,2,\cdots,m)$ 为 $\frac{F(z)}{z}$ 的极点。

根据极点的形式不同，下面我们分三种情况进行讨论。

1) $\frac{F(z)}{z}$ 只含单极点

若 $\frac{F(z)}{z}$ 的极点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 互不相同，则 $\frac{F(z)}{z}$ 可以展开为



$$\frac{F(z)}{z}=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{K_1}{z-z_1}+\frac{K_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{K_m}{z-z_m}=\sum_{i=1}^{m}\frac{K_i}{z-z_i} \tag{10-40}$$

式中，系数 K_i 可以通过下式计算：

$$K_i=(z-z_i)\left.\frac{F(z)}{z}\right|_{z=z_i} \tag{10-41}$$

将求得的系数 K_i 代入式(10-40)，并在等号两端同时乘以 z，则

$$F(z)=\sum_{i=1}^{m}K_i\frac{z}{z-z_i}\qquad R_{-}<|z|<R_{+} \tag{10-42}$$

根据表 10－1 常用双边 Z 变换对

$$z_i^n u(n)\overset{\text{ZT}}{\longleftrightarrow}\frac{z}{z-z_i}\qquad |z|>|z_i| \tag{10-43}$$

$$-z_i^n u(-n-1)\overset{\text{ZT}}{\longleftrightarrow}\frac{z}{z-z_i}\qquad |z|>|z_i| \tag{10-44}$$

即可求解 Z 逆变换 $f(n)$。

【例 10.19】 已知像函数 $F(z)=\dfrac{z^2}{z^2-z-2}$，收敛域为 $|z|>2$，$|z|<1$，$1<|z|<2$。分别求其对应的原函数 $f(n)$。

【解题思路与技巧】 注意逆变换的形式与收敛域有关。

解：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^2}{z^2-z-2}=\frac{z}{(z+1)(z-2)}$$

显然，$\dfrac{F(z)}{z}$ 为真分式，可以进行部分分式展开

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z+1)(z-2)}=\frac{k_1}{z+1}+\frac{k_2}{z-2}$$

上式只含有 $z=-1$ 和 $z=2$ 两个一阶极点，根据式(10-41)，得

$$k_1=(z+1)\left.\frac{F(z)}{z}\right|_{z=-1}=\left.\frac{z}{z-2}\right|_{z=-1}=\frac{1}{3}$$

$$k_2=(z-2)\left.\frac{F(z)}{z}\right|_{z=2}=\left.\frac{z}{z+1}\right|_{z=2}=\frac{2}{3}$$

所以

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{\frac{1}{3}}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}}{z-2}$$

即

$$F(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z+1}+\frac{2}{3}\frac{z}{z-2}$$

(1) 当收敛域为 $|z|>2$ 时，$f(n)$ 为因果序列，由式(10-43)，得

$$f(n)=\left[\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{2}{3}2^n\right]u(n)$$

(2) 当收敛域为 $|z|<1$ 时，$f(n)$ 为反因果序列，由式(10-44)，得



$$f(n)=\left[-\frac{1}{3}(-1)^n-\frac{2}{3}2^n\right]u(-n-1)$$

(3) 当收敛域为 $1<|z|<2$ 时，$f(n)$ 为双边序列，它由因果序列($|z|>1$)和反因果序列($|z|<2$)组合而成，即

$$f(n)=\frac{1}{3}(-1)^n u(n)-\frac{2}{3}2^n u(-n-1)$$

本例的结果与例 10.18 的结果是一致的，而且由部分分式展开法可以得到原序列的闭合形式的解。

2) $\dfrac{F(z)}{z}$ 含有重极点

设 $\dfrac{F(z)}{z}$ 在 $z=z_0$ 处有 r 阶重极点，则 $\dfrac{F(z)}{z}$ 可以表示为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{B(z)}{(z-z_0)^r}$$

则 $\dfrac{F(z)}{z}$ 可以展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_{0r}}{(z-z_0)^r}+\frac{K_{0r-1}}{(z-z_0)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{01}}{z-z_0} \tag{10-45}$$

系数 $K_{0i}(i=0,1,2,\cdots,r)$ 为

$$K_{0i}=\frac{1}{(r-i)!}\frac{\mathrm{d}^{r-i}}{\mathrm{d}z^{r-i}}\left[(z-z_0)^r\frac{F(z)}{z}\right]\bigg|_{z=z_0} \tag{10-46}$$

将求得的系数 K_{0i} 代入式(10-45)，并在等号两端同时乘以 z，则

$$F(z)=\sum_{i=1}^{r}K_{0i}\frac{z}{(z-z_i)^i}\quad R_-<|z|<R_+ \tag{10-47}$$

根据 $F(z)$ 的收敛域和各分式的 Z 逆变换可求得 $F(z)$ 的 Z 逆变换。其中，一阶单极点对应的分式可代入式(10-42)，并通过查表(10－1)求其 Z 逆变换，重极点对应的分式可代入式(10-47)，并通过查表(10-1)求其 Z 逆变换。

【例 10.20】 已知像函数 $F(z)=\dfrac{z^3+z^2}{(z-1)^3}$，$|z|>1$，求其对应的原函数 $f(n)$。

【解题思路与技巧】 方法同例 10.19，注意重根对应逆变换的表达式。

解：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}$$

显然，$\dfrac{F(z)}{z}$ 为真分式，可以进行部分分式展开

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}=\frac{k_{03}}{(z-1)^3}+\frac{k_{02}}{(z-1)^2}+\frac{k_{01}}{z-1}$$

求系数 $\dfrac{F(z)}{z}$，得

$$k_{03}=(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=1}=2$$





$$k_{02}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]\bigg|_{z=1}=3$$

$$k_{01}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]\bigg|_{z=1}=1$$

所以

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{2}{(z-1)^3}+\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}$$

即

$$F(z)=\frac{2z}{(z-1)^3}+\frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

由于 $|z|>1$，查表 10-1 可得

$$f(n)=\left[\frac{2}{2!}n(n-1)+3n+1\right]u(n)=(n+1)^2u(n)$$

3) $\frac{F(z)}{z}$ 含共轭极点

若 $\frac{F(z)}{z}$ 含有一对共轭单极点，$\frac{F(z)}{z}$ 应用部分分式展开法展开的过程及系数的求法与实极点的情况完全一致，只是计算相对较为复杂。

设 $\frac{F(z)}{z}$ 含有一对共轭单极点 $z_{1,2}=c\pm \mathrm{j}d$，则 $\frac{F(z)}{z}$ 可展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K}{z-z_1}+\frac{K^*}{z-z_1^*} \tag{10-48}$$

令 $K=|K|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$，则 $K^*=|K|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$

又令
$$z_{1,2}=c\pm \mathrm{j}d=a\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\beta}$$

式中
$$a=\sqrt{c^2+d^2},\quad \beta=\arctan\left(\frac{d}{c}\right)$$

式(10-48)可改写为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{|K|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}{z-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}}+\frac{|K|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{z-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta}}$$

即

$$F(z)=\frac{|K|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}{z-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}}z+\frac{|K|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{z-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta}}z$$

由常用双边 Z 变换对，若 $|z|>a$，得

$$\begin{aligned}f(n)&=|K|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}(a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta})^n+|K|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta})^n u(n)\\&=|K|a^n[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta n+\varphi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta n+\varphi)}]u(n)\\&=2|K|a^n\cos(\beta n+\varphi)u(n)\end{aligned} \tag{10-49}$$

若 $|z|<a$，同理可得

$$f(n)=-2|K|a^n\cos(\beta n+\varphi)u(-n-1) \tag{10-50}$$

【例 10.21】 已知像函数 $F(z)=\frac{z}{z^2-4z+8}$，

(1) 若 $F(z)$ 的收敛域为 $|z|>2\sqrt{2}$，求其对应的原函数 $f(n)$。

(2) 若 $F(z)$ 的收敛域为 $|z|<2\sqrt{2}$，求其对应的原函数 $f(n)$。

【解题思路与技巧】 当根为共轭根时，可以把共轭根看成两个单根，也可以直接记住式(10-49)和式(10-50)。

解：(1) 若 $F(z)$ 的收敛域为 $|z|>2\sqrt{2}$，

由于收敛域在圆的外部，$f(n)$ 为因果序列。

$F(z)$ 的极点为 $z_{1,2}=2\pm \mathrm{j}2$，$\dfrac{F(z)}{z}$ 可展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z^2-4z+8}=\frac{k}{z-(2+\mathrm{j}2)}+\frac{k^*}{z-(2-\mathrm{j}2)}$$

根据式(10-48)，得

$$k=[z-(2+\mathrm{j}2)\frac{\mathrm{d}z}{z}\Big|_{z=2+\mathrm{j}2}=-\frac{1}{4}\mathrm{j}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$k^*=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

所以

$$F(z)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\frac{z}{z-(2+\mathrm{j}2)}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\frac{z}{z-(2-\mathrm{j}2)}$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\frac{z}{z-2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\frac{z}{z-2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}$$

当 $|z|>2\sqrt{2}$ 时，经过整理可得

$$f(n)=\frac{1}{4}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}(2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}})^n+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}(2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}})^n]u(n)$$

$$=\frac{1}{4}(2\sqrt{2})^n[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\frac{\pi}{4}n-\frac{\pi}{2})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{2})}]u(n)$$

$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)u(n)$$

(2) 若 $F(z)$ 的收敛域为 $|z|<2\sqrt{2}$，根据上面结果，可以求得

$$f(n)=-\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)u(-n-1)$$

注意：该题也可以用式(10-49)和式(10-50)直接求得。

【例 10.22】 已知像函数 $F(z)=\dfrac{z^4}{(z^2+4)^2}$，$|z|>2$，求其对应的原函数 $f(n)$。

【解题思路与技巧】 方法同例 10.21。

解：$F(z)$ 有一对共轭极点 $z_{1,2}=\pm\mathrm{j}2=2\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$，将 $\dfrac{F(z)}{z}$ 展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^3}{(z-\mathrm{j}2)^2(z+\mathrm{j}2)^2}=\frac{k_1}{(z-\mathrm{j}2)^2}+\frac{k_1^*}{(z+\mathrm{j}2)^2}+\frac{k_2}{z-\mathrm{j}2}+\frac{k_2^*}{z+\mathrm{j}2}$$

求系数可得



$$k_1 = (z-\mathrm{j}2)^2 \frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=\mathrm{j}2} = \mathrm{j}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$k_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-\mathrm{j}2)^2 \frac{F(z)}{z}\right]\bigg|_{z=\mathrm{j}2} = \frac{1}{2}$$

所以

$$F(z) = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}z}{(z-\mathrm{j}2)^2} + \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}z}{(z+\mathrm{j}2)^2} + \frac{\frac{1}{2}z}{z-\mathrm{j}2} + \frac{\frac{1}{2}z}{z+\mathrm{j}2}$$

由式(10-49)可得

$$\begin{aligned} f(n) &= n2^{n-1}\cos\left[(n-1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]u(n) + 2^2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)u(n) \\ &= \left[\frac{n}{2}+1\right]2^n\cos\left[\frac{n\pi}{2}\right]u(n) \end{aligned}$$

2. 若 $m \geqslant n$，则 $F(z)$ 为假分式

此时，可用多项式除法将 $F(z)$ 表示为

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

其中

$$F_1(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_{m-n} z^{m-n}$$

$$F_2(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad \text{为真分式} \tag{10-51}$$

式中，$c_i(i=0,1,2,\cdots,m-n)$ 为实数。

显然 $F_1(z)$ 的逆变换为 $c_i\delta(n+i)$ 之和。$F_2(z)=\dfrac{B(z)}{A(z)}$ 为真分式，可按式(10-40)方法展开为部分分式求 Z 逆变换。

10.4.3　反演积分法(留数法)

与连续时间信号的拉普拉斯逆变换类似，Z 变换也可以用反演积分法(留数法)求得。本小节主要介绍用留数法来求 $F(z)$ 的逆变换。

根据复变函数的留数定理可知

若

$$f(n) \xleftrightarrow{\mathrm{ZT}} F(z)$$

则

$$f(n) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C F(z)z^{n-1}\mathrm{d}z = \sum_m \mathrm{Res}\left[F(z)z^{n-1}\right]\Big|_{z=z_i} \tag{10-52}$$

式中，C 为在 $F(z)$ 的收敛域内包含所有极点的环绕原点逆时针方向的闭合路径。Res 表示极点的留数，z_m 为 $F(z)z^{n-1}$ 的极点。

若 $F(z)$ 的收敛域为 $R_1 < |z| < R_2$，可以把 $F(z)$ 分成两部分。

当 $|z|>R_1$ 时，$f(n)$ 为因果序列，此时求 C 内极点的留数。

当 $|z|<R_2$ 时，$f(n)$ 为反因果序列，此时求 C 外极点的留数。

【知识要点提醒】 留数的计算方法如下。

如果 $F(z)z^{n-1}$ 在 $z=z_i$ 处有一阶极点，则该极点的留数

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{n-1}]\big|_{z=z_i}=(z-z_i)F(z)z^{n-1}\big|_{z=z_i} \tag{10-53}$$

如果 $F(z)z^{n-1}$ 在 $z=z_i$ 处有 r 阶极点，则

$$\underset{z=z_i}{\mathrm{Res}}[F(z)z^{n-1}]=\frac{1}{(r-1)!}\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}z^{r-1}}[(z-z_i)^rF(z)z^{n-1}]\bigg|_{z=z_i} \tag{10-54}$$

【例 10.23】 已知像函数 $F(z)=\dfrac{12}{(z+1)(z-2)(z-3)}$，$1<|z|<2$，求其对应的原函数 $f(n)$。

【解题思路与技巧】 对于求解 Z 逆变换时，用部分分式和留数法都可以，一般来说，当 $F(z)$ 为单根或低阶重根时，用留数法求解简单，当重根阶数较高时，用部分分式法求解简单。

解： $F(z)$ 的极点为 $z_1=-1$，$z_2=2$，$z_3=3$。其极点分布和收敛域如图 10.5 所示。

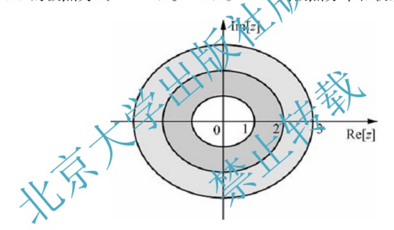


图 10.5 例 10.23 题收敛域

函数

$$F(z)z^{n-1}=\frac{12z^{n-1}}{(z+1)(z-2)(z-3)}$$

当 $n>0$ 时，$f(n)$ 为是因果序列，则 $F(z)z^{n-1}$ 在围线 C 内有一个极点 $z_1=-1$，根据式(10-53)得

$$f_1(n)=\underset{z=-1}{\mathrm{Res}}F(z)z^{n-1}=(z+1)\frac{12z^{n-1}}{(z+1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=-1}=-(-1)^n \quad n>0$$

当 $n=0$ 时，则 $F(z)z^{n-1}$ 在围线 C 内有两个极点 $z_1=0$ 和 $z_1=-1$，因此

$$f(0)=\underset{z=0}{\mathrm{Res}}F(z)z^{-1}+\underset{z=-1}{\mathrm{Res}}F(z)z^{-1}$$

经计算，可得 $\underset{z=0}{\mathrm{Res}}F(z)z^{-1}=2 \quad \underset{z=-1}{\mathrm{Res}}F(z)z^{-1}=-1$

经求和 $f(0)=2-1=1 \quad n=0$

由于第一项为 $\delta(n)$，第二项为 $-(-1)^n$，$n>0$，当第二项取 $n=0$ 时，可以写成 $\delta(n)-$

$(-1)^n, n \geqslant 0$，将前两项合并，可得

$$f(n) = 2\delta(n) - (-1)^n \quad n \geqslant 0$$

当 $n < 0$ 时，$f(n)$ 为反因果序列，则 $F(z)z^{n-1}$ 在围线 C 外有两个极点 $z = 2$ 和 $z = 3$，经计算可得

$$f(n) = \underset{z=2}{\mathrm{Res}} F(z)z^{n-1} + \underset{z=3}{\mathrm{Res}} F(z)z^{n-1} = (2)^{n+1} - (3)^n \quad n < 0$$

将上面计算结果综合到一起，可得 $F(z)$ 的双边 Z 变换

$$f(n) = \begin{cases} 2^{n+1} - 3^n & n < 0 \\ 2\delta(n) - (-1)^n & n \geqslant 0 \end{cases}$$

【例 10.24】 已知像函数 $F(z) = \dfrac{4z}{(z-1)^2(z-3)}, 1 < |z| < 3$，求其对应的原函数 $f(n)$。

【解题思路与技巧】 方法同例 10.23。

解：$F(z)$ 的极点为 $z_1 = 1$（二重），$z_2 = 3$，其极点分布和收敛域如图 10.6 所示。

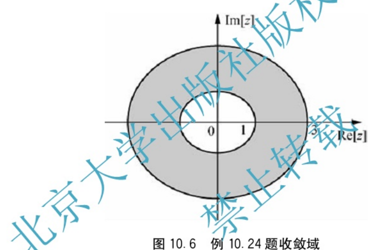


图 10.6 例 10.24 题收敛域

函数

$$F(z)z^{n-1} = \frac{4z^n}{(z-1)^2(z-3)}$$

根据留数法，当收敛域 $1 < |z| < 3$ 时，在积分路径 C 内，$F(z)z^{n-1}$ 有一个极点 $z_1 = 1$（二重），在积分路径 C 外有一个极点 $z_2 = 3$，根据式(10-53)和式(10-54)，极点 z_1 和 z_2 的留数分别为

$$f_1(n) = \underset{z_1}{\mathrm{Res}} F(z)z^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2 F(z)z^{n-1}\right]\bigg|_{z=1}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{4z^n}{z-3}\bigg|_{z=1} = -(2n+1)$$

$$f_2(n) = \underset{z_2}{\mathrm{Res}} F(z)z^{n-1} = (z-3)F(z)z^{n-1}\big|_{z=3} = 3^n$$

将两种情况合并，可得 $F(z)$ 的双边 Z 变换

$$f(n) = \begin{cases} -3^n & n < 0 \\ -(2k+1) & n \geqslant 0 \end{cases} = -(2n+1)u(n) - 3^n u(-n-1)$$

10.4.4 单边 Z 逆变换的计算方法

与双边 Z 逆变换的计算方法一致，单边 Z 逆变换的计算也可以用幂级数展开法、部分分式展开法、反演积分法。由于单边 Z 变换的收敛域为 $|z|>R$，其 Z 逆变换 $f(n)$ 为因果序列。因此，单边 Z 逆变换的上述计算方法与收敛域为 $|z|>R$ 时的双边 Z 逆变换的计算方法完全相同。下面我们举例说明部分分式展开法和反演积分法，幂级数展开法不再赘述。

1. 部分分式展开法

【例 10.25】 已知 $F(z)=\dfrac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+z^{-1}-2z^{-2}}$，$|z|>2$，求其单边 Z 逆变换。

【解题思路与技巧】 本题注意单边 Z 变换与双边 Z 变换的区别。

解： $F(z)=\dfrac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+z^{-1}-2z^{-2}}=\dfrac{z\left(z-\frac{1}{3}\right)}{z^2+z-2}=\dfrac{z\left(z-\frac{1}{3}\right)}{(z-1)(z+2)}$，　$|z|>2$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z-\frac{1}{3}}{(z-1)(z+2)}=\frac{k_1}{z-1}+\frac{k_2}{z+2}$$

求得系数

$$k_1=(z-1)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=1}=\frac{2}{9}\qquad k_2=(z+1)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=-2}=\frac{7}{9}$$

即

$$F(z)=\frac{\frac{2}{9}z}{z-1}+\frac{\frac{7}{9}z}{z+2}\qquad |z|>2$$

所以

$$f(n)=\left[\frac{2}{9}+\frac{7}{9}(-2)^n\right]u(n)$$

2. 反演积分法(留数法)

【例 10.26】 已知 $F(z)=\dfrac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+z^{-1}-2z^{-2}}$，$|z|>2$，求其单边 Z 逆变换。

【解题思路与技巧】 该题收敛域在圆外，故求圆内两个极点的留数即可。

解： $F(z)z^{n-1}=\dfrac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+z^{-1}-2z^{-2}}z^{n-1}=\dfrac{z^n\left(z-\frac{1}{3}\right)}{z^2+z-2}=\dfrac{z^n\left(z-\frac{1}{3}\right)}{(z-1)(z+2)}$

当 $n\geqslant 0$ 时，$F(z)z^{n-1}$ 的极点为 $z=1$ 和 $z=-2$，即



$$f(n)=\underset{z=1}{\mathrm{Res}}[F(z)z^{n-1}]+\underset{z=-2}{\mathrm{Res}}[F(z)z^{n-1}]$$

$$=(z-1)\left.\frac{z^n\left(z-\frac{1}{3}\right)}{(z-1)(z+2)}\right|_{z=1}+(z+2)\left.\frac{z^n\left(z-\frac{1}{3}\right)}{(z-1)(z+2)}\right|_{z=-2}$$

$$=\frac{2}{9}+\frac{7}{9}(-2)^n$$

当 $n<0$ 时，除极点 $z=1$ 和 $z=-2$ 外，增加极点 $z=0$。而由题意，$|z|>2$，因此 $n<0$ 时，$f(n)=0$，

故
$$f(n)=\left[\frac{2}{9}+\frac{7}{9}(-2)^n\right]u(n)$$

10.5 离散时间系统的 Z 域分析

10.5.1 离散时间系统的 Z 域分析

在连续时间系统分析时，可以通过拉普拉斯变换将微分方程转化为代数方程求解。与之类似，在离散时间系统分析时，也可以通过 Z 变换将差分方程转化为代数方程求解。对差分方程的求解，只要对差分方程的两边同时求 Z 变换，然后利用 Z 变换的时移性质和已经给出的初始条件，就可以得到系统响应的 Z 变换，最后通过 Z 逆变换就可以得到响应 $y(n)$。

1. 基本信号 z^n 激励下的零状态响应

由离散时间系统的时域分析可知，当系统输入信号为 $f(n)$，系统的单位脉冲响应为 $h(n)$ 时，系统的零状态响应 $y_{zs}(n)$ 为

$$y_{zs}(n)=f(n)*h(n)$$

设 $f(n)=z^n$，则

$$y_{zs}(n)=f(n)*h(n)=z^n*h(n)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)z^{n-m}=z^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)z^{-m}$$

对于因果系统，$h(n)$ 为因果信号，则

$$y_{zs}(n)=z^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)z^{-m}=z^n\sum_{m=0}^{\infty}h(m)z^{-m}=z^nH(z) \tag{10-55}$$

式中

$$H(z)=\sum_{m=0}^{\infty}h(m)z^{-m}=\mathrm{ZT}[h(n)] \tag{10-56}$$

即 $H(z)$ 是系统单位脉冲响应 $h(n)$ 的单边 Z 变换，称为离散时间系统的系统函数。

式(10-55)表明，在基本信号 z^n 激励下，离散时间系统的零状态响应为 $z^nH(z)$。

2. 一般信号 $f(n)$ 激励下的零状态响应

由离散时间系统的时域分析可知，离散时间系统的零状态响应为

$$y_{zs}(n) = f(n) * h(n)$$

根据 Z 变换的时域卷积性质

$$\mathrm{ZT}[y_{zs}(n)] = F(z)H(z)$$

由于 $f(n)$ 为因果信号，所以 $y_{zs}(n)$ 也为因果信号，则

$$Y_{zs}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_{zs}(n)z^{-n} = F(z)H(z) \tag{10-57}$$

系统传递函数可以表示为

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{F(z)} \tag{10-58}$$

【知识要点提醒】 综上所述，离散时间系统的零状态响应求解步骤如下。

(1) 求激励信号 $f(n)$ 的单边 Z 变换 $F(z)$，$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$。

(2) 求冲激响应 $h(n)$ 的 Z 变换 $H(z)$，$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}$。

(3) 求系统零状态响应 $y_{zs}(n)$ 的单边 Z 变换 $Y_{zs}(z)$，$Y_{zs}(z) = F(z)H(z)$。

(4) 求系统零状态响应 $y_{zs}(n)$，$y_{zs}(n) = \mathrm{ZT}^{-1}[Y_{zs}(z)]$。

【例 10.27】 系统框图如图 10.7 所示，求各系统的单位序列响应 $h(n)$ 和阶跃响应 $g(n)$。

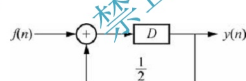


图 10.7 例 10.27 题图

【解题思路与技巧】 首先将系统时域框图改画成 Z 域框图，然后求系统传递函数 $H(z)$，通过求 Z 逆变换求出 $h(n)$ 和 $g(n)$。

解： 画出 Z 域框图，如图 10.8 所示。

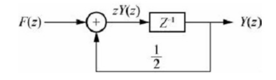


图 10.8 例 10.27 题解

其延时器为 z^{-1}，加法器的输出

$$zY(z) = \frac{1}{2}Y(z) + F(z)$$





因此，可解得系统函数为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{1}{z-\frac{1}{2}}=z^{-1}\times\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

取逆变换，得系统的单位脉冲响应为

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$$

由于

$$u(n)\xleftrightarrow{\text{LT}}U(z)=\frac{z}{z-1}$$

系统阶跃响应的象函数为

$$G(z)=H(z)\cdot U(z)=\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\times\frac{z}{z-1}=\frac{2z}{z-1}-\frac{2z}{z-\frac{1}{2}}$$

取逆变换，得系统的阶跃响应为

$$g(n)=\left[2-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u(n)$$

【例 10.28】 已知某离散系统激励信号为 $f_1(n)=u(n)$ 时，零状态响应为 $y_{1zs}(n)=3^n u(n)$，求系统激励信号为 $f_2(n)=(n+1)u(n)$ 时，系统的零状态响应 $y_{2zs}(n)$。

【解题思路与技巧】 该题的过渡函数是 $H(z)$，故首先要求出 $H(z)$，然后用 $Y(z)=F(z)H(z)$ 即可求解该题。

解： 求 $f_1(n)$ 和 $y_{1zs}(n)$ 的单边 Z 变换分别为

$$F_1(z)=\frac{z}{z-1}\quad |z|>1 \qquad Y_{1zs}(z)=\frac{z}{z-3}\quad |z|>3$$

其系统函数为

$$H(z)=\frac{Y_{1zs}(z)}{F_1(z)}=\frac{z-1}{z-3}\quad |z|>3$$

当激励信号为 $f_2(n)$ 时，其单边 Z 变换为

$$F_2(z)=\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}=\frac{z^2}{(z-1)^2}\quad |z|>1$$

此时，零状态响应 $Y_{2zs}(z)$ 为

$$Y_{2zs}(z)=F_2(z)H(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-3)}=\frac{\frac{2}{3}z}{z-3}-\frac{\frac{1}{2}z}{z-1}\quad |z|>3$$

求 Z 逆变换

$$y_{2zs}(n)=\text{ZT}^{-1}[Y_{2zs}(z)]=\left(\frac{3}{2}3^n-\frac{1}{2}\right)u(n)=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)u(n)$$

10.5.2 离散时间系统差分方程的 Z 域分析

Z 变换是分析线性时不变离散时间系统的重要工具，利用 Z 变换的位移性质，可以将

描述系统的时域差分方程变换为 Z 域的代数方程，便于运算和求解。由于系统激励信号为因果信号，因此可以方便地求解系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

设系统的激励信号为 $f(n)$，系统响应为 $y(n)$，描述 N 阶系统的差分方程一般可以表示为

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j f(n-j) \tag{10-59}$$

式中，$a_i(i=0,1,\cdots,N)$、$b_j(j=0,1,\cdots,M)$ 为实常数，设 $f(n)$ 为因果信号，系统的初始状态为 $y(-1)$，$y(-12)$，$\cdots$，$y(-N)$。

根据单边 Z 变换的位移性质

$$y(n-i) \stackrel{\text{ZT}}{\longleftrightarrow} z^{-i}Y(z) + \sum_{n=0}^{i-1} y(n-i)z^{-n} \tag{10-60}$$

$f(n)$ 为因果信号，$n<0$ 时，$f(n)=0$，则

$$f(n-i) \stackrel{\text{ZT}}{\longleftrightarrow} z^{-i}F(z) \tag{10-61}$$

对式(10-59)两边同时取单边 Z 变换，并代入式(10-60)、式(10-61)，得

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \left[z^{-i}Y(z) + \sum_{n=0}^{i-1} y(n-i)z^{-n} \right] = \sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j} F(z)$$

即

$$\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i} Y(z) + \sum_{i=0}^{N} a_i \left[\sum_{n=0}^{i-1} y(n-i)z^{-n} \right] = \sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j} F(z)$$

由上式可以解得

$$Y(z) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} F(z) - \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i \left[\sum_{n=0}^{i-1} y(n-i)z^{-n} \right]}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} \tag{10-62}$$

上式第一项仅与系统激励有关而与系统初始状态无关，该项为零状态响应 $y_{zs}(n)$ 的象函数，记为 $Y_{zs}(z)$；其第二项仅与系统初始状态有关而与系统激励无关，该项为零输入响应 $y_{zi}(n)$ 的象函数，记为 $Y_{zi}(z)$。因此，上式可以改写为

$$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} F(z) - \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i \left[\sum_{n=0}^{i-1} y(n-i)z^{-n} \right]}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} \tag{10-63}$$

式中

$$Y_{zs}(z) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} F(z) \qquad Y_{zi}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i \left[\sum_{n=0}^{i-1} y(n-i)z^{-n} \right]}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}$$

【例 10.29】 已知 LTI 系统的差分方程为

$$y(n) - y(n-1) - 2y(n-2) = f(n) + 2f(n-2)$$



若 $y(-1)=2$，$y(-2)=0$，$f(n)=u(n)$。求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

【解题思路与技巧】 直接对差分方程求 Z 变换即可得。注意到该题也可以用分别求零输入响应、零状态响应和全响应的方法求解。

解： 对差分方程两边取单边 Z 变换，并根据单边 Z 变换的位移性质，可得

$$Y(z)-[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y(z)+y(-2)+y(-1)z^{-1}]=F(z)+2z^{-2}F(z)$$

经整理，可得

$$(1-z^{-1}-2z^{-2})Y(z)-(1+2z^{-1})y(-1)-2y(-2)=(1+2z^{-2})F(z)$$

即

$$Y(z)=\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}F(z)+\frac{[y(-1)+2y(-2)]+2y(-1)z^{-1}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}$$

上式第一项为零状态响应 $y_{zs}(n)$ 的象函数 $Y_{zs}(z)$，第二项是零输入响应 $y_{zi}(n)$ 的象函数 $Y_{zi}(z)$。

代入初始条件 $y(-1)=2$，$y(-2)=0$，可得

$$Y(z)=\frac{z^2+2}{z^2-z-2}F(z)+\frac{2z^2+4z}{z^2-z-2}$$

求 $f(n)=u(n)$ 的单边 Z 变换

$$F(z)=ZT[u(n)]=\frac{z}{z-1}$$

代入上式，可得

$$Y(z)=\frac{z^2+2}{z^2-z-2}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{2z^2+4z}{z^2-z-2}=Y_{zs}(z)+Y_{zi}(z)$$

其中

$$Y_{zs}(z)=\frac{z^3+2z}{(z-2)(z-1)(z+1)}\qquad Y_{zi}(z)=\frac{2z^2+4z}{(z-2)(z+1)}$$

用部分分式法求 Z 逆变换

$$\frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{z^2+2}{(z-2)(z-1)(z+1)}=\frac{2}{(z-2)}-\frac{3}{2}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}$$

$$\frac{Y_{zi}(z)}{z}=\frac{2z+4}{(z-2)(z+1)}=\frac{8}{3}\frac{1}{z-2}-\frac{2}{3}\frac{1}{z+1}$$

两边同时乘以 Z，可得

$$Y_{zs}(z)=\frac{2z}{(z-2)}-\frac{3}{2}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}$$

$$Y_{zi}(z)=\frac{8}{3}\frac{z}{z-2}-\frac{2}{3}\frac{z}{z+1}$$

取单边逆 Z 变换，得

$$y_{zs}(n)=\left[2\,(2)^n+\frac{1}{2}\,(-1)^n-\frac{3}{2}\right]u(n)$$

$$y_{zi}(n)=\left[\frac{8}{3}\,(2)^n-\frac{2}{3}\,(-1)^n\right]u(n)$$

系统全响应

$$y(n)=y_{zs}(n)+y_{zi}(n)=\left[\frac{14}{3}(2)^n-\frac{1}{6}(-1)^n-\frac{3}{2}\right]u(n)$$

【例 10.30】 已知某离散时间 LIT 系统的框图如图 10.9 所示。

求：(1) 系统的函数 $H(z)$。

(2) 系统的单位脉冲响应 $h(n)$。

(3) 系统的单位阶跃响应 $g(n)$。

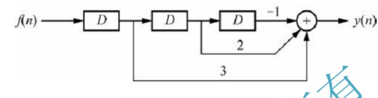


图 10.9 例 10.30 题图

【解题思路与技巧】 由框图写出差分方程，然后求解该方程即可。

解： 由系统框图写出系统差分方程

$$y(n)=3f(n-1)+2f(n-2)-f(n-3)$$

(1) 系统的函数 $H(z)$。

对差分方程求 Z 变换

$$Y(z)=(3z^{-1}+2z^{-2}-z^{-3})F(z)$$

故

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=3z^{-1}+2z^{-2}-z^{-3}=\frac{3z^2+2z-1}{z^3}$$

(2) 系统的单位脉冲响应 $h(n)$。

由于 $H(z)\stackrel{ZT}{\longleftrightarrow}h(n)$，故直接求 $H(z)$ 的逆变换就可得到 $h(n)$，则

$$h(n)=3\delta(n-1)+2\delta(n-2)-\delta(n-3)$$

(3) 系统的单位阶跃响应 $g(n)$。

由于 $$g(n)=h(n)*u(n)$$

所以

$$\begin{aligned}g(n)&=[3\delta(n-1)+2\delta(n-2)-\delta(n-3)]*u(n)\\&=3u(n-1)+2u(n-2)-u(n-3)\end{aligned}$$

【例 10.31】 系统框图如图 10.10 所示。

求：(1) 求系统的传递函数 $H(z)$。

(2) 该系统的单位序列响应 $h(n)$。

(3) 当输入信号为 $f(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ 时系统的零状态响应 $y(n)$。

【解题思路与技巧】 方法同上。

解： (1) 求系统的传递函数 $H(z)$。

画出系统 Z 域框图如图 10.11 所示。



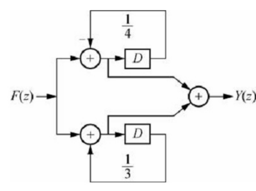


图 10.10　例 10.31 题图

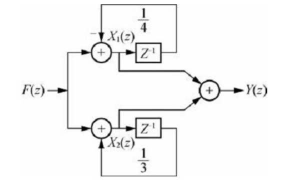


图 10.11　例 10.31 题解图

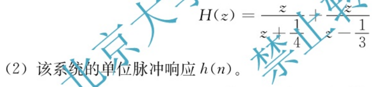
输出方程

$$X_1(z)=F(z)-\frac{1}{4}z^{-1}X_1(z)\qquad X_2(z)=F(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X_2(z)$$

即

$$X_1(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}F(z)\qquad X_2(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}F(z)$$

$$Y(z)=X_1(z)+X_2(z)=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right]F(z)$$



经整理，可得系统的系统传递函数 $H(z)$，故

$$H(z)=\frac{z}{z+\frac{1}{4}}+\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

（2）该系统的单位脉冲响应 $h(n)$。

$$h(n)=\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$$

（3）当输入信号为 $f(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ 时系统的零状态响应 $y_{zs}(n)$。

由于

$$F(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

因此

$$Y(z)=F(z)H(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\times\left[\frac{z}{z+\frac{1}{4}}+\frac{z}{z-\frac{1}{3}}\right]=\frac{\frac{11}{3}z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{2z}{z-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{3}z}{z+\frac{1}{4}}$$

取逆变换，得系统零状态响应

$$y_{zs}(n)=\left[\frac{11}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

10.6 离散时间系统的频率响应与稳定性

10.6.1 离散时间系统频率响应

线性时不变离散时间系统的系统函数 $H(z)$，通常 $H(z)$ 是 z 的有理分式，可以表示为

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0} \tag{10-64}$$

式中 $a_i(i=0,1,\cdots,N)$ 、$b_j(j=0,1,\cdots,M)$ 为实常数，其中 $A(z)=0$ 的根 $p_i(i=0,1,\cdots,n)$ 称为系统函数 $H(z)$ 的极点，$B(z)=0$ 的根 $z_j(j=0,1,\cdots,m)$ 称为系统函数 $H(z)$ 的零点。这样，将多项式 $A(z)$ 和 $B(z)$ 因式分解后，$H(z)$ 又可以表示为

$$H(z)=\frac{b_m(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}=\frac{b_m\prod\limits_{j=0}^{m}(z-z_j)}{\prod\limits_{i=0}^{n}(z=p_i)} \tag{10-65}$$

$H(z)$ 的极点和零点可能是实数、虚数或复数。由于 $A(z)$ 和 $B(z)$ 的系数都是实数，所以 $H(z)$ 的零、极点若为虚数或复数，则必共轭成对出现。

若系统函数 $H(z)$ 的极点均在单位圆内，则其在单位圆上（$|z|=1$）收敛，将 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 称为系统的频率响应，其中，ω 为角频率，T 为采样周期。由式(10-65)知，系统的频率响应表示为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=H(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}=\frac{b_m\prod\limits_{j=0}^{m}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-z_j)}{\prod\limits_{i=0}^{n}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}=p_i)} \tag{10-66}$$

在 Z 平面上，复数可用矢量表示，令

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-p_i=A_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i} \tag{10-67}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-z_j=B_j\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_j} \tag{10-68}$$

式中 A_i 、B_j 为差矢量的模，θ_i 、φ_j 为它们的辐角，设 $b_m>0$，则频率响应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 又可表示为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{b_m\prod\limits_{j=0}^{m}B_j\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_j}}{\prod\limits_{i=0}^{n}A_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i}}=|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} \tag{10-69}$$

式中，幅频响应为

$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=\frac{b_m B_1 B_2\cdots B_m}{A_1 A_2\cdots A_n} \tag{10-70}$$

相频响应为



$$\varphi(\mathrm{j}\omega)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j-\sum_{i=1}^{n}\theta_i \tag{10-71}$$

【知识要点提醒】 由式(10-66)知，离散系统的频率响应取决于系统函数 $H(z)$ 的零、极点在 Z 平面上的分布。当 ω 从 0 变化到 $\frac{2\pi}{T}$ 时，即复变量 z 从 $z=1$ 沿单位圆逆时针方向旋转一周时，各差矢量的模和辐角也随之变化，由式(10-70)、式(10-71)即能画出幅频和相频响应曲线。

【例 10.32】 某离散因果系统的系统函数为 $H(z)=\dfrac{z+1}{z-0.5}$，求其频率响应。

【解题思路与技巧】 系统的频率响应为 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=H(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}$，然后求出 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 模和相角即为频率响应。

解： 由于系统函数 $H(z)$ 的极点为 $p=0.5$，极点在单位圆内，故收敛域包括单位圆。系统频率响应为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=H(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{2}}=\frac{\cos\omega+\mathrm{j}\sin\omega+1}{\cos\omega+\mathrm{j}\sin\omega-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{(1+\cos\omega)^2+\sin^2\omega}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}{\sqrt{\left(\cos\omega-\frac{1}{2}\right)^2+\sin^2\omega}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}}$$

由于

$$B=\sqrt{(1+\cos\omega)^2+\sin^2\omega}=\sqrt{2+2\cos\omega}$$

$$A=\sqrt{\left(\cos\omega-\frac{1}{2}\right)^2+\sin^2\omega}=\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\omega}$$

$$\varphi=\arctan\frac{\sin\omega}{1+\cos\omega}\qquad \beta=\arctan\frac{\sin\omega}{\cos\omega-\frac{1}{2}}$$

幅频响应

$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=\frac{\sqrt{2+2\cos\omega}}{\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\omega}}$$

相频响应

$$\psi(\omega)=\varphi-\beta=\arctan\frac{\sin\omega}{1+\cos\omega}-\arctan\frac{\sin\omega}{\cos\omega-\frac{1}{2}}$$

频率响应为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi(\omega)}$$

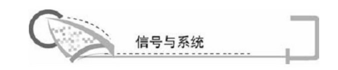
画出幅频及相频特性曲线如图 10.12 所示。

【例 10.33】 求图 10.13 所示系统的零极点。

【解题思路与技巧】 首先由系统框图写出传递函数 $H(z)$，然后求出零极点。

解： 由图列出系统的 Z 域方程

$$Y(z)=\left(\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}\right)Y(z)+(1-2z^{-1}+4z^{-2})F(z)$$



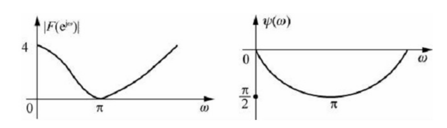


图 10.12　例 10.32 题幅频特性和相频特性

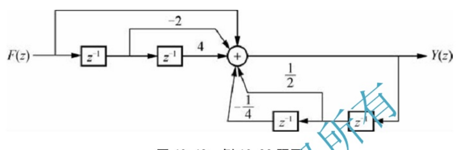


图 10.13　例 10.33 题图

经整理，可得

$$H(z)=\frac{1-2z^{-1}+4z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{z^2-2z+4}{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}}$$

其零、极点分别为

$$z_{1,2}=1\pm \mathrm{j}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$$

$$p_{1,2}=\frac{1}{4}\pm \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$$

10.6.2　离散时间系统的稳定性

离散时间系统的稳定性是离散系统分析与设计的重要问题，在实际设计中，只有系统是稳定的，系统才能正常工作。

1. 稳定系统的定义

如果离散时间系统对任意有界输入序列产生的零状态响应也是有界的，则该系统称为有界输入有界输出系统。有界输入有界输出系统是稳定系统。

若 M_1 和 M_2 为有界正实数，

设 $|f(n)|\leqslant M_1$，则有

$$|y(n)|\leqslant M_2 \tag{10-72}$$

该系统称为稳定系统。

2. 由脉冲响应 $h(n)$ 判断离散时间系统的稳定性

【知识要点提醒】　线性时不变因果离散时间系统稳定的充分必要条件为





$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leqslant M \tag{10-73}$$

其中，$h(n)$ 是离散时间系统的单位序列脉冲响应，M 为有界正实数。

3. 由传递函数 $H(z)$ 的零极点判断系统的稳定性

在离散时间系统的传递函数 $H(z)$ 已知的情况下，并能够容易求出 $H(z)$ 的零极点时，可以通过 $H(z)$ 的零极点位置判断系统的稳定性，具体方法如下。

若离散时间系统的系统传递函数 $H(z)$ 的所有极点都位于单位圆内，说明系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 是收敛的序列，即 $h(n)$ 绝对可和，则系统稳定。

【知识要点提醒】 由此可以得出结论，要判别系统的稳定性就需要判别系统函数 $H(z)$ 的极点是否全部位于单位圆内。

4. 朱里判断准则

在离散时间系统分析时，经常遇到系统传递函数 $H(z)$ 的极点很难求出，因此无法判断 $H(z)$ 的极点是否在单位圆内，也就无法判断系统是否稳定。此时需要用朱里判断准则来判断系统的稳定性。

朱里提出了一种通过列表的方法来判断 $H(z)$ 的极点是否全部位于单位圆内，称之为朱里准则。

设 n 阶离散时间系统 $H(z)=\dfrac{B(z)}{A(z)}$，式中

$$A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{10-74}$$

朱里列表如下：

行							
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_1	c_0	
4	c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-2}	c_{n-1}	
5	d_{n-2}	d_{n-3}	d_{n-4}	$\cdots$	d_0		
6	d_0	d_1	d_2	$\cdots$	d_{n-2}		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$2n-3$	r_2	r_1	r_0				

由上表可以看出，朱里排列共有 $(2n-3)$ 行。第 1 行为 $A(z)$ 各项系数，第 2 行也是 $A(z)$ 的系数，但按反序排列，第 3 行及第 5 行元素按下列规则计算：

$$c_{n-1}=\begin{vmatrix}a_n & a_0\\ a_0 & a_n\end{vmatrix},\ c_{n-2}=\begin{vmatrix}a_n & a_1\\ a_0 & a_{n-1}\end{vmatrix},\ c_{n-3}=\begin{vmatrix}a_n & a_2\\ a_0 & a_{n-2}\end{vmatrix}\quad\cdots \tag{10-75}$$

$$d_{n-2}=\begin{vmatrix}c_{n-1} & c_0\\ c_0 & c_{n-1}\end{vmatrix},\ d_{n-3}=\begin{vmatrix}c_{n-1} & c_1\\ c_0 & c_{n-2}\end{vmatrix},\ d_{n-3}=\begin{vmatrix}c_{n-1} & c_2\\ c_0 & c_{n-3}\end{vmatrix}\quad\cdots \tag{10-76}$$

依此类推，可以计算出各行元素，直到第 $(2n-3)$ 行为止。

【知识要点提醒】 朱里准则指出，$A(z)=0$ 的根，即 $H(z)$ 的极点全部在单位圆内的充要条件是

$$\left.\begin{array}{l}A(1)>0\\(-1)^nA(-1)>0\\a_n>|a_0|\\c_{n-1}>|c_0|\\d_{n-2}>|d_0|\\\cdots\\r_2>|r_0|\end{array}\right\} \tag{10-77}$$

【例 10.34】 已知某离散系统的系统函数为 $H(z)=\dfrac{z^2+4z-3}{4z^4-4z^3+2z-1}$，试判断系统的稳定性。

【解题思路与技巧】 判断系统是否稳定，如果极点容易求得，可利用其极点是否全部在单位圆内进行判别，若系统传递函数较为复杂，较难求得传递函数的极点，则利用朱里准则判别。

解： $H(z)$ 的分母多项式为 $A(z)=4z^4-4z^3+2z-1$，对其系数进行朱里排列，得

$$\begin{array}{ccccc}4 & -4 & 0 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 0 & -4 & 4\\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \\ d_2 & d_1 & d_0 & & \end{array}$$

计算各行元素

$$c_3=\begin{vmatrix}4 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=15\quad c_2=\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & -4\end{vmatrix}=-14\quad c_1=\begin{vmatrix}4 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0\quad c_0=\begin{vmatrix}4 & -4\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4$$

$$d_2=\begin{vmatrix}15 & 4\\ 4 & 15\end{vmatrix}=209\qquad d_1=\begin{vmatrix}15 & 0\\ 4 & -14\end{vmatrix}=-210\qquad d_0=\begin{vmatrix}15 & -14\\ 4 & 0\end{vmatrix}=56$$

根据朱里准则

$$A(1)=4-4+2-1=1>0\qquad (-1)^4A(-1)=4+4-2-1=5>0$$

$$a_4>|a_0|\qquad c_3>|c_0|\qquad d_2>|d_0|$$

即满足式(10-77)的所有条件，所以该系统是稳定的。



本章知识要点

1. 双边 Z 变换及收敛域

1）双边 Z 变换的定义

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n}$$

2）双边 Z 变换的收敛域

级数收敛的充分条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)z^{-n}|=M<\infty$$

收敛域是分别以 R_- 和 R_+ 为半径的圆形成的环状域，即 $R_-<|z|<R_+$

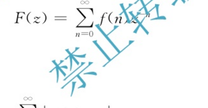
3）双边 Z 变换的收敛域的特点

4）常用序列的双边 Z 变换

2. 单边 Z 变换

1）单边 Z 变换的定义

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}$$



2）单边 Z 变换的收敛域

收敛的充分条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f(n)z^{-n}|<\infty$$

收敛域为 $|z|>|z_0|$，收敛域为半径为 $|z_0|$ 的圆外区域。

3）常用序列的单边 Z 变换

表 10－1 为常用 Z 变换列表。

3. Z 变换的性质

表 10－2 为 Z 变换的性质列表。

4. Z 逆变换

1）幂级数展开法(长除法)

2）部分分式展开法

3）反演积分法(留数法)

5. 离散时间系统的 Z 域分析

1） 基本信号 z^n 激励下的零状态响应

$$y_{zs}(n) = z^n H(z)$$

2） 一般信号 $f(n)$ 激励下的零状态响应

$$Y_{zs}(z) = F(z)H(z) \qquad y_{zs}(n) = \mathrm{ZT}^{-1}[Y_{zs}(z)]$$

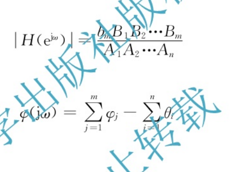
3） 离散时间系统差分方程的 Z 域分析

6. 离散时间系统的频率响应

频率响应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 可表示为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{b_m \prod_{j=0}^{m} B_j \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_j}}{\prod_{i=0}^{n} A_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i}} = |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

幅频响应为



$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = \frac{b_m B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n}$$

相频响应为

$$\varphi(\mathrm{j}\omega) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j - \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

7. 离散时间系统的稳定性

1） 稳定系统的定义

设 $|f(n)| \leqslant M_1$，则有 $|y(n)| \leqslant M_2$。

2） 由 $h(n)$ 判断稳定性

系统稳定的充分必要条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leqslant M$$

3） 由 $H(z)$ 的零极点判断系统的稳定性

若传递函数 $H(z)$ 的所有极点都位于单位圆内，则说明 $h(n)$ 绝对可和，则系统稳定。

4） 朱里判断准则

习题 10

10.1 求下列序列的双边 Z 变换及收敛域。

(1) $\delta(n) - \delta(n-3)$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-2)$



(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$　　(4) $2^n u(2-n)$

10.2 根据 Z 变换的性质求下列序列的双边 Z 变换。

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+2^n u(-n-1)$　　(2) $a^n u(n+3)$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u(n)$　　(4) $(2^{-n}-3^n)u(n+1)$

(5) $(-1)^n a^n u(n-2)$　　(6) $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi n}u(n+1)$

(7) $2^{-n}u(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u(-n)$　　(8) $n(n-1)u(-n-1)$

10.3 已知 $f(n)$ 的双边 Z 变换为 $F(z)$，收敛域为 $R_- < |z| < R_+$，求下列信号的双边 Z 变换。

(1) $f^*(n)$　　(2) $\sum_{i=-\infty}^{n} a^i f(i)$

(3) $a^n \sum_{i=-\infty}^{n} f(i)$　　(4) $n\sum_{i=-\infty}^{n} f(i-1)$

10.4 根据 Z 变换的性质求下列序列的单边 Z 变换。

(1) $\delta(n-1)+2\delta(n-3)$　　(2) $\left[2^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}\right]u(n)$

(3) $\frac{1}{2}[1+(-1)^n]u(n-2)$　　(4) $a^{n-2}u(n)+a^n u(n-2)$

(5) $n(n-1)u(n-1)$　　(6) $n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-2)$

(7) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)u(n)$　　(8) $\frac{a^n}{n+1}u(n)$

10.5 已知因果序列的 Z 变换如下，求 $f(0)$ 、$f(1)$ 、$f(2)$。

(1) $F(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$　　(2) $F(z)=\frac{z^2-z}{(z-1)^2}$

10.6 利用时域卷积定理求下列序列 $f(n)$ 与 $h(n)$ 的卷积 $y(n)=f(n)*h(n)$。

(1) $f(n)=a^n u(n)$, $h(n)=\delta(n-2)$

(2) $f(n)=a^n u(n)$, $h(n)=u(n)-u(n-1)$

(3) $f(n)=a^n u(n)$, $h(n)=b^n u(n)$

10.7 求下列像函数的原函数。

(1) $F(z)=z+1+z^{-1}$, $0<|z|<\infty$　　(2) $F(z)=\frac{1}{1+az^{-1}}$, $|z|<|a|$

(3) $F(z)=\frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$, $|z|<1$　　(4) $F(z)=\frac{z^2}{(z-3)^3}$, $|z|<3$

(5) $F(z)=\frac{z^3}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z-1)}$, $\frac{1}{2}<|z|<1$　　(6) $F(z)=\frac{1}{z^2+1}$, $|z|>1$

10.8　求下列像函数的单边 Z 逆变换。

(1) $F(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $|z|>3$　　(2) $F(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z^2-1)}$, $|z|>1$

(3) $F(z)=\dfrac{z^2+z}{(z-1)(z^2-z+1)}$, $|z|>1$　　(4) $F(z)=\dfrac{z}{z^2-\sqrt{3}z+1}$, $|z|>1$

(5) $F(z)=\dfrac{z^2+2}{(z-3)^3}$, $|z|>3$　　(6) $F(z)=\dfrac{z-1}{z^2(z-2)}$, $|z|>2$

10.9　已知因果序列 $f(n)$ 满足方程 $f(n)=nu(n)+\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(i)$，求序列 $f(n)$。

10.10　已知因果序列 $f(n)$ 的 Z 变换为 $F(z)$，设 $G(z)=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}F\left(\dfrac{z}{2}\right)$，求 $g(n)$。

10.11　某线性时不变离散时间系统，若 $f(n)=(-2)^n$，有 $y(n)=0$；若 $f(n)=(0.5)^n u(n)$，有 $y(n)=\delta(n)+a\,(0.25)^n u(n)$。

(1) 试确定常数 a 的值。(2) 若 $f(n)=1$，试求 $y(n)$。

10.12　系统框图如图 10.14 所示，求各系统的单位序列响应 $h(n)$ 和阶跃响应 $g(n)$。

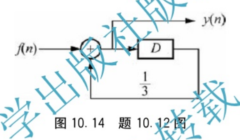


图 10.14　题 10.12 图

10.13　系统框图如图 10.14 所示，求输入下列各信号时系统的零状态响应 $y(n)$。

(1) $f(n)=nu(n)$　　(2) $f(n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u(n)$

10.14　系统框图如图 10.15 所示，求输入信号为 $f(n)=(\sqrt{2})^n\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)u(n)$ 时系统的零状态响应 $y(n)$。

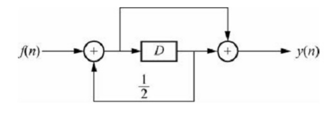


图 10.15　题 10.14 图

10.15　系统框图如图 10.16 所示。

求：(1) 求系统的传递函数 $H(z)$。

(2) 该系统的单位序列响应 $h(n)$。

(3) 当输入信号为 $f(n)=u(n)$ 时系统的零状态响应 $y(n)$。

10.16　已知某线性时不变因果离散时间系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 满足差分方程



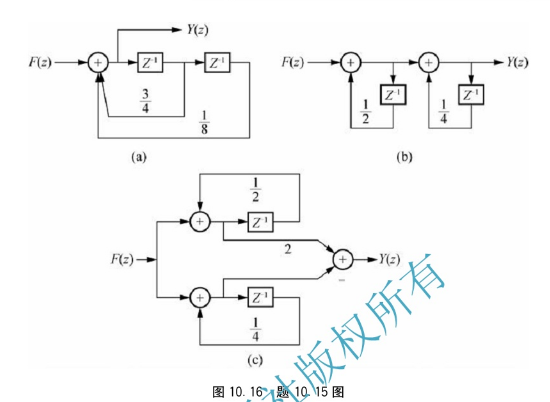


图 10.16　题 10.15 图

$$h(n)+2h(n-1)=b(-4)^n u(n)$$

当系统的激励为 $f(n)=8^n$ 时，系统的零状态响应为 $y_{zs}(n)=8^{n+1}$，试求常数 b 和系统函数 $H(z)$。

10.17　已知某线性时不变离散时间系统的激励为 $f(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ 时，系统的零状态响应为 $y_{zs}(n)=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$，求激励为 $f(n)=u(n-1)$ 时系统的零状态响应。

10.18　求下列差分方程描述的因果离散时间系统的全响应。

(1) $y(n)-2y(n-1)+y(n-2)=f(n)-2f(n-1)$ $f(n)=u(n)$，$y(-1)=1$，$y(-2)=1$

(2) $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=f(n)$，$f(n)=u(n)$，$y(-1)=0$，$y(-2)=0.5$

10.19　求下列差分方程描述的因果离散时间系统的全响应。

(1) $y(n)+2y(n-1)=(n-2)f(n)$　　$f(n)=u(n)$，$y(0)=1$

(2) $y(n+2)-2y(n+1)+y(n)=f(n)$　　$f(n)=u(n)$，$y(0)=0$，$y(1)=1$

10.20　描述某 LTI 系统的差分方程为 $y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=f(n)+2f(n-2)$。已知 $y(0)=2$，$y(1)=7$，激励为 $f(n)=u(n)$。求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

10.21　描述某线性时不变系统的差分方程为

$$y(n)+0.1y(n-1)-0.02y(n-2)=10u(n)$$

已知 $y(-1)=4$，$y(-2)=6$。求解差分方程，并指出其中的零状态响应分量与零输入响应分量，稳态响应分量与暂态响应分量。

10.22　已知某一阶线性时不变系统，当初始状态 $y(-)=1$，输入为 $f_1(n)=u(n)$ 时，其全响应 $y_1(n)=2u(n)$；当初始状态 $y(-)=-1$，激励为 $f_2(n)=\left(\frac{1}{2}\right)nu(n)$ 时，其全响应 $y_2(n)=(n-1)u(n)$。求激励为 $f_3(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ 时的零状态响应。

10.23　某线性时不变离散时间系统，已知当初始状态 $y(-1)=0$，$y(-2)=\frac{1}{2}$，激励为 $f(n)=u(n)$ 时，其全响应 $y(n)=[1-(-1)^n-(-2)n]u(n)$，求描述该系统的差分方程。

10.24　某线性时不变离散时间系统满足差分方程

$$y(n)-y(n-1)-\frac{3}{4}y(n-2)=f(n-1)$$

(1) 求该系统的系统函数 $H(z)$。

(2) 求系统单位脉冲响应 $h(n)$ 的三种可能选择。

(3) 对每一种 $h(n)$ 讨论系统是否稳定？是否因果？

(4) 求该系统的频率响应，并画出幅频特性图。

10.25　已知某离散时间线性时不变因果系统可用一对差分方程描述

$$y(n)+3y(n-1)+x(n)+2x(n-1)=2f(n)$$

$$y(n)-4y(n-1)+2x(n)-x(n-1)=-5f(n)$$

其中，$f(n)$ 为输入序列，$y(n)$ 为输出序列，$x(n)$ 为中间变量

(1) 求该系统的系统函数。

(2) 若系统输入序列为 $f(n)=nu(n)$，初始状态为 0，求 $n=2$ 时，系统的输出 $y(n)|_{n=2}$。

10.26　已知因果离散时间系统的系统函数如下，试检验系统是否稳定。

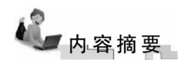
(1) $H(z)=\dfrac{7z+4}{7z^4+5z^3+2z^2-z-6}$　　(2) $H(z)=\dfrac{z^2+4}{z^5+2z^4+3z^3+3z^2+2z+2}$

(3) $H(z)=\dfrac{z^2}{6z^3+2z^2+2z-2}$

10.27　已知因果离散时间系统的系统函数如下，为使系统稳定，K 的值应满足什么条件？

(1) $H(z)=\dfrac{z+3}{z^2+z+K}$　　(2) $H(z)=\dfrac{2z+1}{2z^2-(K+1)z+2}$

第11章 连续时间系统的状态空间分析



内容摘要

本章主要介绍连续时间系统状态空间的基本概念，包括状态空间方程的描述，状态空间方程的建立、状态空间方程的求解。

教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识	工程应用方向
状态空间方程的基本概念	了解状态空间方程的描述 掌握状态空间方程的一般形式	系统微分方程	多输入多输出系统
状态空间方程的建立	掌握电路网络空间方程的建立 掌握由微分方程建立状态空间方程 掌握由系统函数建立状态空间方程	离散时间信号	求解状态方程
状态空间方程的分析	掌握状态空间方程的响应 掌握状态转移矩阵的计算 掌握系统响应的时域分析 掌握状态空间方程的复频域分析	离散时间系统	求解系统方程



教学目标与要求

了解状态空间方程的基本概念。

掌握连续时间系统状态空间方程的建立。

掌握连续时间系统状态方程的分析。

在系统分析中，一般都需要建立描述该系统的系统模型。常用的系统模型有输入一输出法和状态变量法。

输入-输出模型也常称为外部描述法。它主要关心的是系统的输入 $f(\cdot)$ 与输出 $y(\cdot)$ 之间的关系，而不直接涉及系统的内部情况。随着科学技术的发展，除了分析和设计常见的线性、时不变、单输入-单输出系统外，还要分析非线性、时变、多输入-多输出系统。此外，在研究系统外部特性的同时，还需要研究系统的内部特性，这就需要采用以内部变量为基础的状态空间分析法。

11.1 状态空间方程

11.1.1 状态空间描述

为了说明状态变量和状态方程，下面举例说明。

【例 11.1】 一个二阶网络如图 11.1 所示，输入信号 $i_s(t)$，输出信号为 $u(t)$ 和 $i_c(t)$，列出电路的方程。

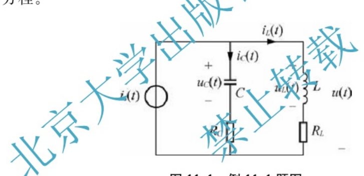


图 11.1 例 11.1 题图

【解题思路与技巧】 利用电路基础知识中节点电压法再结合 KCL 和 KVL 可列出方程。

解： 根据 KCL 和 KVL 可列出方程

$$\begin{cases} i_s(t)=i_L(t)+i_C(t)=i_L(t)+C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+R_Li_L(t)=u_C(t)+R_CC\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{11-1}$$

经整理，可得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{C}i_L(t)+\dfrac{1}{C}i_s(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{L}u_C(t)-\dfrac{R_L+R_C}{L}i_L(t)+\dfrac{R_C}{L}i_S(t) \end{cases} \tag{11-2}$$

若指定网络两端的电压 $u(t)$ 和 $i_C(t)$ 为输出，可得



$$\begin{cases} u(t) = u_C(t) - R_C i_L(t) + R_C i_s(t) \\ i_C(t) = -i_L(t) + i_s(t) \end{cases} \tag{11-3}$$

令 $x_1(t) = u_C(t)$，$x_2(t) = i_L(t)$，它们的一阶导数为

$$\dot{x}_1(t) = \frac{du_C(t)}{dt}, \quad \dot{x}_2(t) = \frac{di_L(t)}{dt}$$

系统的激励与响应分别令为

$$f(t) = i_s(t), \quad y_1(t) = u(t), \quad y_2(t) = i_C(t)$$

则式(11-2)和式(11-3)可写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0 - \frac{1}{C}x_2(t) + \frac{1}{C}f(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R_L + R_C}{L}x_2(t) + \frac{R_C}{L}f(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) - R_C x_2(t) + R_C f(t) \\ y_2(t) = 0 - x_2(t) + f(t) \end{cases}$$

把上两式写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_L + R_C}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ \frac{R_C}{L} \end{bmatrix} f(t) \tag{11-4}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_C \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_C \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \tag{11-5}$$

其中 $u_C(t_0)$ 和 $i_L(t_0)$ 称之为图 11.1 网络在 $t = t_0$ 时刻的状态。$u_C(t)$ 和 $i_L(t)$ 是描述该状态随时间 t 变化的变量，称之为状态变量，式(11-4)称为状态方程。它描述了系统状态变量的一阶导数与状态变量和激励的关系。式(11-5)形式的方程称为输出方程，它描述了输出与状态变量和激励之间的关系，它是代数方程。通常将状态方程和输出方程总称为状态空间方程或系统方程。

用状态空间分析系统主要有以下优点。

(1) 除了能够给出系统的响应外，还提供了系统的内部状态，能够观察并处理几个状态变量，以满足一定的设计要求。

(2) 状态方程是一阶微分或差分方程组，因此，状态空间描述方程形式适合于计算机进行处理。

(3) 状态空间方程不仅适合于分析线性时不变系统，也应用于线性时变系统和非线性系统。

本章只限于讨论线性时不变系统的状态空间分析。

11.1.2　状态空间方程的一般形式

设有一个多输入-多输出连续时间系统如图 11.2 所示。

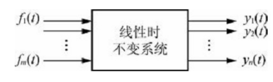


图 11.2　多输入-多输出系统框图

有 m 个输入信号 $f_1(t)$，$f_2(t)$，…，$f_m(t)$，有 n 个输出响应 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_n(t)$。将系统的 p 个状态变量记作 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_p(t)$。

由于在连续时间系统中，状态变量是连续时间函数，因此，对于因果系统而言，在任意瞬间，状态变量的导数是状态变量和输入信号的函数。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1p}x_p+b_{11}f_1+b_{12}f_2+\cdots+b_{1m}f_m\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2p}x_p+b_{21}f_1+b_{22}f_2+\cdots+b_{2m}f_m\\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_p(t)}{\mathrm{d}t}=a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pp}x_p+b_{m1}f_1+b_{m2}f_2+\cdots+b_{mn}f_m\end{cases}\tag{11-6}$$

式中，a_{ij}，b_{ij} 是由系统参数决定的系数。对线性时不变系统，它们是常数；对于线性时变系统，它们是时间的函数。

如定义 $\dot{x}_i=\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$，式(11-6)可写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_p(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1p}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2p}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{p1}&a_{p2}&\cdots&a_{pp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_p(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\ b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\\ \vdots\\ f_m\end{bmatrix}\tag{11-7}$$

上式可简写为

$$\dot{x}_q(t)=Ax(t)+Bf(t)\tag{11-8}$$

该式称为状态方程。

其中

$$\dot{x}(t)=[\dot{x}_1\quad \dot{x}_2\quad \cdots\quad \dot{x}_p]^{\mathrm{T}}\tag{11-9}$$

$$x(t)=[x_1\quad x_2\quad \cdots\quad x_p]^{\mathrm{T}}\tag{11-10}$$

$$f(t)=[f_1(t)\quad f_2(t)\quad \cdots\quad f_m(t)]^{\mathrm{T}}\tag{11-11}$$

系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1p}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2p}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{p1}&a_{p2}&\cdots&a_{pp}\end{bmatrix}\tag{11-12}$$



$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} \tag{11-13}$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 为 $p\times p$ 方阵，称为系数矩阵；$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times m$ 方阵，称为控制矩阵。

同时，由于系统有 n 个输出 $y_1(t)$，$y_2(t)$，…，$y_n(t)$，因此，它们中的每一个都是状态变量和激励表示的代数方程，其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \tag{11-14}$$

上式可以简写为

$$y(t)=\boldsymbol{C}x(t)+\boldsymbol{D}f(t) \tag{11-15}$$

该式称为输出方程。

其中

$$y(t)=[y_1(t) \quad y_2(t) \quad \cdots \quad y_n(t)]^{\mathrm{T}} \tag{11-16}$$

系数矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix} \tag{11-17}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nm} \end{bmatrix} \tag{11-18}$$

其中，$\boldsymbol{C}$ 为 $n\times p$ 方阵，称为输出矩阵；$\boldsymbol{D}$ 为 $n\times m$ 方阵，称为系数矩阵。

对于线性时不变系统，矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 是常量矩阵。

【知识要点提醒】 分析状态空间方程需要注意如下几个基本问题。

（1）状态和状态变量的本质在于表征系统的记忆特性或动态特性，反映了系统内部储能状态的变化。因此，只有动态系统才存在状态和状态变量，而对于静态系统，则无状态和状态变量，自然也不存在状态空间描述的问题。

（2）根据状态变量及状态模型，一般可选取独立记忆元件(储能元件)中与系统能量有关的物理量作为系统的状态变量，状态变量是一组独立变量，其数目等于独立记忆元件的个数，即系统的阶数。

（3）在给定的系统中，状态变量的选取并不是唯一的，在实际应用中，通常选取那些概念明确、测量容易并能使计算机简化的物理量作为状态变量。例如在LTI的电系统中，

可直接选取独立电容电压、电感电流或移位器输出信号作为状态变量。

（4）根据状态空间方程，可以先由状态方程解出状态矢量 $x(\cdot)$，然后由输出方程得到输出矢量 $y(\cdot)$。其中，$x(\cdot)$ 提供系统的内部信息，$y(\cdot)$ 给出系统的输出响应。

11.2 连续时间系统状态方程的建立

系统状态方程的建立方法可以分为两种：直接法和间接法。直接法是根据给定的网络直接列出状态方程和输出方程。间接法则是根据系统的输入-输出方程、系统函数或系统的信号流图写出状态方程和输出方程。

11.2.1 电路网络状态方程的直接建立

建立线性时不变系统的状态方程，首先要选择状态变量。

【知识要点提醒】 以电系统为例，建立电路系统状态空间方程步骤如下。

（1）选取系统中所有独立电容电压和独立电感电流作为状态变量。

（2）对与状态变量相联系的每个电容和电感分别列出独立的节点（或割集）KCL 方程和回路 KVL 方程。

（3）利用适当的 KCL、KVL 方程和元件伏安关系，消去方程中可能出现的中间变量，然后整理得出标准形式的状态方程。

（4）用观察法列出输出方程。

下面举例说明。

【例 11.2】 系统电路如图 11.3 所示，其中 $R_1=2\Omega$, $R_2=2\Omega$, $R_3=3\Omega$, $C=0.5\text{F}$, $L=1\text{H}$, 取图中电压 $u_o(t)$ 和 $i_o(t)$ 作为输出，列写出该电路的状态方程和输出方程。

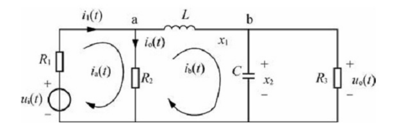


图 11.3 例 11.2 题图

【解题思路与技巧】 以系统中独立电容电压和独立电感电流作为状态变量，用 KCL 和 KVL 建立联立方程，导出状态方程和输出方程。

解： 取电感电流 x_1 和电容电压 x_2 作为电路网络状态变量。

由电容节点 b 列写 KCL 方程，有

$$x_1 = C\dot{x}_2 + \frac{1}{R_3}x_2$$

对含有电感回路的 i_b 列写 KVL 方程，有

$$L\dot{x}_1 + x_2 = R_2 i_o$$

式中，i_1 是中间变量，应消除。

列写回路 i_a 的 KVL 方程

$$u_i = R_1 i_1 + R_2 i_o$$

考虑到节点 a 的 KCL 方程，$i_1 = i_o + x_1$，上式可写为

$$u_i = R_1(i_o + x_1) + R_2 i_o$$

从而有

$$i_o = \frac{u_i - R_1 x_1}{R_1 + R_2}$$

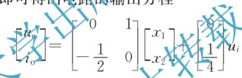
将该式代入 KVL，得

$$L\dot{x}_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}(u_i - R_1 x_1) - x_2$$

经整理，并代入各元件参数值，得出电路状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

由于电路中 $u_o = x_2$，即可得出电路的输出方程



$$\begin{bmatrix} u_o \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} u_i$$

【例 11.3】 电路如图 11.4 所示，试列出系统的状态方程和输出方程。

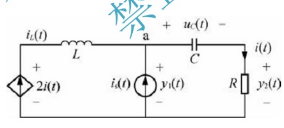


图 11.4 例 11.3 题图

【解题思路与技巧】 方法同例 11.2。

解： 设选取 $u_C(t)$，$i_L(t)$ 为状态变量，分别设为 $x_1(t)$，$x_2(t)$

由 a 点根据 KVL 定律可得

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = i_L(t) + i_s(t)$$

由电感回路可得

$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) + Ri(t) - 2i(t) = 0$$

由上两式可得

$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)+(R-2)i_L(t)+(R-2)i_s(t)=0$$

由电路图可得

$$y_1(t)=u_C(t)+R[i_L(t)+i_s(t)]$$
$$y_2(t)=R[i_L(t)+i_s(t)]$$

状态方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{C}x_2(t)+\dfrac{1}{C}i_s(t)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{L}x_1(t)+\dfrac{2-R}{L}x_2(t)+\dfrac{2-R}{L}i_s(t)\end{cases}$$

输出方程为

$$\begin{cases}y_1(t)=x_1(t)+Rx_2(t)+i_s(t)\\y_2(t)=Rx_2(t)+i_s(t)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\dfrac{1}{C}\\-\dfrac{1}{L}&\dfrac{2-R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C}\\\dfrac{2-R}{L}\end{bmatrix}[i_s(t)]$$

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&R\\0&R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix}[i_s(t)]$$

11.2.2 由微分方程建立系统状态空间方程

在连续时间系统中，系统输入-输出方程和系统状态方程是对同一系统的两种不同的描述，它们之间必然有一定的联系，因此可根据系统的具体情况，写出系统的输入-输出微分方程，再选择适当的状态变量，把微分方程转化为状态变量的一阶微分方程组，然后把微分方程组写成系统状态空间方程。

由系统微分方程建立系统状态空间方程可以分成下面两种情况。

1. 方程中不含输入信号的导数项

【例 11.4】 将微分方程为 $y'''(t)+a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=f(t)$ 转换为状态空间方程。

【解题思路与技巧】 以微分方程各阶导数作为状态变量列写方程。

解： 根据微分方程理论，如果 $y(0)$，$y'(0)$，$y''(0)$ 和 $t>0$ 时的输入信号 $f(t)$ 为已知，则系统未来的状态就能完全确定。因此，可以选取 $y(t)$，$y'(t)$ 和 $y''(t)$ 为状态变量。令

$$\begin{cases}x_1=y(t)\\x_2=y'(t)\\x_3=y''(t)\end{cases}$$



则

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = y'(t) = x_2 \\ \dot{x}_2 = y''(t) = x_3\end{cases}$$

根据微分可得

$$\dot{x}_3 = y'''(t) = -a_0 y(t) - a_1 y'(t) - a_2 y''(t) + f(t) = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + f(t)$$

上式就是状态方程，将其写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}[f(t)]$$

其输出方程为

$$y(t) = x_1$$

写成标准形式的输出方程为

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix} + [0][f(t)]$$

需要指出的是：1×1 矩阵只有一个元素，也可以把它当做普通量而不加“[]”。

2. 方程中含有输入信号的导数项

【例 11.5】 系统微分方程为

$$y'''(t) + 2y''(t) - 3y'(t) + 6y(t) = 3f'''(t) + 8f''(t) - 3f'(t) + 10f(t)$$

写出系统的状态方程和输出方程。

【解题思路与技巧】 以微分方程各阶导数作为状态变量列写方程，对于输入信号包含导数项，还需要建立辅助方程。

解：由于系统是三阶的，故需要三个状态变量。

输入信号的阶数是三阶的，方程为假分式，不符合状态方程的标准形式。

为了消除 $f'''(t)$，选择状态变量为

$$x_1(t) = y(t) - 3f(t)$$

即

$$y(t) = x_1(t) + 3f(t)$$

代入系统微分方程，得

$$\dddot{x}_1(t) + 2\ddot{X}_1(t) - 3\dot{x}(t) + 6x_1(t) = 2f''(t) + 6f'(t) - 8f(t)$$

为了消除 $f''(t)$，选取变量为

$$x_2(t) = \dot{x}(t) - 2f(t)$$

即

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + 2f(t)$$



代入上式，得

$$\ddot{x}_2(t)+2\dot{x}_2(t)-3x_2(t)+6x_1(t)=2f'(t)-2f(t)$$

为了消除 $f'(t)$，选取变量为

$$x_3(t)=\dot{x}_2(t)-2f(t)$$

即

$$\dot{x}_2(t)=x_3(t)+2f(t)$$

代入上式，得

$$\dot{x}_3(t)=-2x_3(t)+3x_2(t)-6x_1(t)-6f(t)$$

由此得到状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)+2f(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)+2f(t)\\ \dot{x}_3(t)=-6x_1(t)+3x_2(t)-2x_3(t)-6f(t)\end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 2\\ -6\end{bmatrix}f(t)$$

输出方程为

$$y(t)=x_1(t)+3f(t)$$

矩阵形式为

$$[y(t)]=[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+[3]f(t)$$

【例 11.6】 一个三阶微分方程为 $y'''(t)+a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_1f'(t)+b_0f(t)$，将其转换为状态空间方程。

【解题思路与技巧】 方法同例 11.5。

解：由上题可知，选取 $y(t)$，$y'(t)$ 和 $y''(t)$ 为状态变量。令

$$\begin{cases}x_1=y(t)\\ x_2=y'(t)=\dot{x}_1\\ x_3=y''(t)=\dot{x}_2\end{cases}$$

根据微分方程，有

$$\begin{aligned}\dot{x}_3&=y'''(t)=-a_2y''(t)-a_1y'(t)-a_0y(t)+b_1f'(t)+b_0f(t)\\ &=-a_2x_3-a_1x_2-a_0x_1+f(t)\end{aligned}$$

写出状态方程



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}[f(t)]$$

其状态方程与例11.3相同。

输出方程为

$$y(t)=b_1x_2+b_0x_1$$

矩阵形式为

$$y(t)=[b_0 \quad b_1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

【知识要点提醒】 通过上述线性微分方程分析讨论，可推广到n阶微分方程。

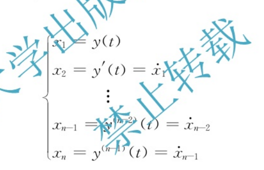
设n阶系统的输入输出微分方程为

$$\begin{aligned}&y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)\\ &=b_{\mathrm{m}}f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b'_1f'(t)+b_0f(t)\end{aligned}$$

1) 若$m<n$

已知系统初始条件$y(0_-)$，$y'(0_-)$，…，$y^{(n-1)}(0_-)$

设状态变量为



$$\begin{cases}x_1=y(t)\\ x_2=y'(t)=\dot{x}_1\\ \quad\vdots\\ x_{n-1}=y^{(n-2)}(t)=\dot{x}_{n-2}\\ x_n=y^{(n-1)}(t)=\dot{x}_{n-1}\end{cases}$$

由微分方程

$$\begin{aligned}y^{(n)}(t)=&-a_{n-1}y^{(n-1)}(t)-a_{n-2}y^{(n-1)}(t)-\cdots-a_1y'(t)-a_0y(t)\\ &+b_{\mathrm{m}}f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b'_1f'(t)+b_0f(t)\end{aligned}$$

可得

$$\dot{x}_n=-a_{n-1}x_n-a_{n-2}x_{n-1}-\cdots-a_1x_2-a_0x_1+f(t)$$

因此，可以由式(11-43)和式(11-44)写出状态方程的矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}f(t)$$

输出方程为

$$y(t)=b_mx_{m+1}+b_{m-1}x_m+\cdots+b_1x_2+b_0x_1$$

矩阵形式为

$$y(t)=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+[0]f(t)$$

写成状态空间标准形式为

$$\dot{x}(t)=\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{B}f(t) \qquad y(t)=\boldsymbol{C}x(t)+\boldsymbol{D}f(t)$$

2）若 $m=n$

输出方程可以写成

$$y(t)=b_0x_1+b_1x_2+\cdots+b_{n-1}x_n+b_n[-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+f(t)]$$

矩阵形式为

$$y(t)=[(b_0-b_na_0)(b_1-b_na_1)\cdots(b_{n-1}-b_na_{n-1})]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+b_nf(t)$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 矩阵不为零。

11.2.3　由系统函数建立系统状态空间方程

【知识要点提醒】 由系统传递函数建立系统状态方程，主要有以下几步。

(1) 根据系统微分方程写出系统传递函数 $H(s)$。

(2) 根据传递函数 $H(s)$ 画出系统的信号流图。

(3) 依次选择每一个积分器的输出作为状态变量。

(4) 写出状态方程和输出方程。

下面举例进行说明。

【例 11.7】 一个三阶微分方程为

$$y'''(t)+5y''(t)+y'(t)+2y(t)=f'(t)+2f(t)$$

写出状态空间方程和输出方程。

【解题思路与技巧】 首先根据系统微分方程写出系统传递函数 $H(s)$，然后画出系统的信号流图，再将积分器的输出设为状态变量即可。

解：求出系统的传递函数 $H(s)$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{s+2}{s^3+5s^2+s+2}=\frac{s^{-2}+2s^{-3}}{1-(-5s^{-1}-s^{-2}-2s^{-3})}$$

画出系统的信号流图，如图 11.5 所示。

选取三个积分器的输出信号 x_1，x_2 和 x_3 作为状态变量，在积分器的输入端列出状态方程



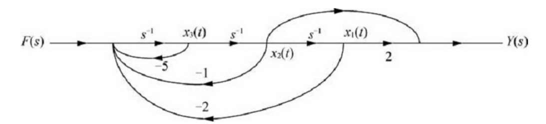


图 11.5 例 11.7 题信号流图

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = f - 2x_1 - x_2 - 5x_3 \end{cases}$$

由输出端列出输出方程为

$$y = 2x_1 + x_2$$

写成矩阵形式的状态空间方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

【例 11.8】 已知连续时间系统的框图如图 11.6 所示，写出系统的状态方程和输出方程。

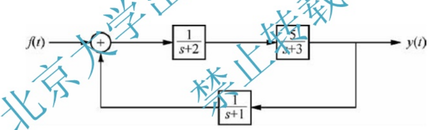


图 11.6 例 11.8 题图

【解题思路与技巧】 先将系统框图转换成系统信号流图，然后方法同例 11.7。

解： 根据系统框图写出系统的传递函数

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{5(s+1)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 11}$$

画出信号流图，如图 11.7 所示。

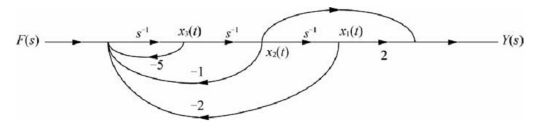


图 11.7 例 11.8 题信号流图

选取三个积分器的输出为状态变量，分别为 $x_1(s)$，$x_2(s)$，$x_3(s)$

输出方程为

$$y(t)=5x_1(t)+5x_2(t)$$

状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=-11x_1(t)-11x_2(t)-6x_3(t)+f(t)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -11 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}f(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}5 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

【例 11.9】 一个三阶微分方程为 $y'''(t)+a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_1f'(t)+b_0f(t)$，将其转换为状态空间方程。

【解题思路与技巧】 方法同例 11.7。

解： 求出系统的传递函数 $H(s)$

$$H(s)=\frac{b_1s+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

画出系统的信号流图，如图 11.8 所示。

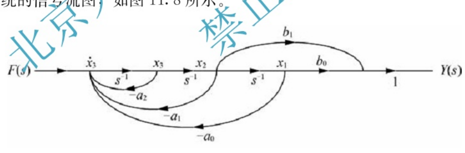


图 11.8　例 11.9 题信号流图

选取三个积分器的输出信号 x_1，x_2 和 x_3 作为状态变量，在积分器的输入端列出状态方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=f-a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3\end{cases}$$

由输出端列出输出方程

$$y=b_0x_1+b_1x_2$$

写成矩阵形式的状态空间方程和输出方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}f\quad y=\begin{bmatrix}b_0&b_1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

该形式是直接型模拟信号流图，信号的模拟除了直接型外，还有级联型和并联型信号流图，其转换形式有所不同，本书不再赘述，需要时请参考其他教材。

推广到 n 系统，如 n 阶微分方程的一般形式为

$$\begin{aligned}&y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)\\&=b_{\mathrm{m}}f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b'_1f'(t)+b_0f(t)\end{aligned}$$

写出相应的复频域方程和系统的传输 $H(s)$ 为

$$(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s+a_0)y(t)=(b_{\mathrm{m}}s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0)f(t)$$

$$H(s)=\frac{b_{\mathrm{m}}s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

根据系统传递函数 $H(s)$ 画出其信号流图，如图 11.9 所示。

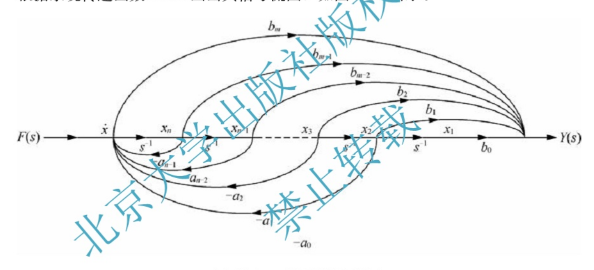


图 11.9 n 阶系统信号流图

选择各积分器的输出端为状态变量，则有

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-2}x_{n-1}-a_{n-1}x_n+f\end{cases}$$

输出方程为

$$\begin{aligned}y&=b_0x_1+b_1x_2+\cdots+b_{n-1}x_n+(-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+f)\\&=(b_0-a_0b_n)x_1+(b_1-a_1b_n)x_2+\cdots+(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)x_n+b_nf\end{aligned}$$

写成标准形式为

$$\dot{x}(t)=\mathbf{A}x(t)+\mathbf{B}f(t)$$

$$y(t)=\boldsymbol{C}x(t)+\boldsymbol{D}f(t)$$

式中各矢量为

$$\begin{cases}x(t)_{n\times1}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}\\ f(t)_{1\times1}=f(t)\\ y(t)_{1\times1}=y(t)\end{cases}$$

各矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}_{n\times n}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{n\times1}=[0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}_{1\times n}=[(b_0-a_0b_n) \quad (b_1-a_1b_n) \quad \cdots \quad (b_{n-1}-a_{n-1}b_n)]$$

$$\boldsymbol{D}_{1\times1}=b_n$$

11.3 连续时间系统状态空间方程的响应

连续时间系统状态方程的一般形式为

$$\dot{x}(t)=\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{B}f(t) \tag{11-19}$$

$$y(t)=\boldsymbol{C}x(t)+\boldsymbol{D}f(t) \tag{11-20}$$

式中：状态矢量为

$$\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_p(t)]^{\mathrm{T}} \tag{11-21}$$

输入矢量为

$$\boldsymbol{f}(t)=[f_1(t) \quad f_2(t) \quad \cdots \quad f_m(t)]^{\mathrm{T}} \tag{11-22}$$

输出矢量为

$$\boldsymbol{y}(t)=[y_1(t) \quad y_2(t) \quad \cdots \quad y_n(t)]^{\mathrm{T}} \tag{11-23}$$

$\boldsymbol{A}_{p\times p}$，$\boldsymbol{B}_{p\times m}$，$\boldsymbol{C}_{n\times p}$，$\boldsymbol{D}_{n\times m}$ 是系数矩阵。对于线性时不变系统，它们都是常量矩阵。

状态方程的解有时域法和复频域法两种。

11.3.1 连续时间系统状态方程的时域求解

对于线性时不变系统，状态方程所表示的是一组常系数一阶线性微分方程，也称为常系数线性向量微分方程。下面介绍状态空间方程的时域求解方法。

$$\dot{x}(t)=\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{B}f(t) \tag{11-24}$$



两边同时乘以 e^{-At}，经移项有

$$e^{-At}\dot{x}(t)-e^{-At}\boldsymbol{A}x(t)=e^{-At}\boldsymbol{B}f(t) \tag{11-25}$$

式(11-25)进一步可以写成

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)]=e^{-At}\boldsymbol{B}f(t) \tag{11-26}$$

对式(11-26)等号两边取 t_0 到 t 的积分，可得

$$e^{-At}x(t)-e^{-At_0}x(t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bf(\tau)d\tau \tag{11-27}$$

经移项整理，可得

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+e^{-At}\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bf(\tau)d\tau\\&=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bf(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{11-28}$$

式中，$x(t_0)$ 是 $t=t_0$ 时的状态矢量，即初始状态矢量。

若初始观察时刻 $t=0_-$，令 $\Phi(t)=e^{At}$，$t\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{At}x(0_-)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bf(\tau)d\tau\\&=\Phi(t)x(0_-)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bf(\tau)d\tau\quad t\geqslant 0\end{aligned} \tag{11-29}$$

其中，$\Phi(t)=e^{At}$ 称为状态转移矩阵。

【知识要点提醒】 转移矩阵 $\Phi(t)$ 具有如下重要性质。

(1) $\Phi(0)=I$

(2) $\Phi(t-t_0)=\Phi(t-t_1)\Phi(t_1-t_0)$

(3) $\Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t)$　　　$\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)$

(4) $\Phi^{-1}(t_1+t_0)=\Phi(t_1)\Phi(t_0)$

(5) $\Phi(nt)=[\Phi(t)]^n$

式(11-29)中的第一项只与初始条件 $x(t_0)$ 有关，称为系统状态矢量的零输入响应，记为

$$x_{zi}(t)=\Phi(t)x(0_-)\quad t\geqslant 0 \tag{11-30}$$

该式表明：系统在零输入情况下，状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的作用是将系统由初始的状态转移至 t 时刻的状态。

式(11-29)第二项只与输入矢量 $f(t)$ 有关，称为系统状态矢量的零状态响应，记为

$$x_{zs}(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bf(\tau)d\tau\quad t\geqslant 0 \tag{11-31}$$

计算零状态响应需要三个矩阵相乘后取积分，实质上这是矩阵卷积运算。计算该矩阵卷积是通过计算各元素卷积来实现的。

例如

$$\boldsymbol{A}(t)*\boldsymbol{B}(t)=\begin{bmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}b_{11}(t)&b_{12}(t)\\b_{21}(t)&b_{22}(t)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(t) * b_{11}(t) + a_{12} * b_{21}(t) & a_{11}(t) * b_{12}(t) + a_{12}(t)b_{22}(t) \\ a_{21}(t) * b_{11}(t) + a_{22}(t) * b_{21}(t) & a_{21}(t) * b_{12}(t) + a_{22}(t) * b_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(t) * \boldsymbol{B}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(t) * b_{11}(t) + a_{12} * b_{21}(t) & a_{11}(t) * b_{12}(t) + a_{12}(t)b_{22}(t) \\ a_{21}(t) * b_{11}(t) + a_{22}(t) * b_{21}(t) & a_{21}(t) * b_{12}(t) + a_{22}(t) * b_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (11\text{-}32)$$

式(11-31)可写为

$$x_{zs}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bf(\tau)\mathrm{d}\tau = \Phi(t)B * f(t) \quad (11\text{-}33)$$

因此，系统状态空间方程的解为

$$x(t) = \Phi(t)x(0_-) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bf(\tau)\mathrm{d}\tau \quad t > 0 \quad (11\text{-}34)$$

即

$$x(t) = x_{zi}(t) + x_{zs}(t) = \Phi(t)x(0_-) + \Phi(t)B * f(t) \quad t > 0 \quad (11\text{-}35)$$

将式(11-35)代入式(11-20)可得系统的输出方程为

$$y(t) = Cx(t) + Df(t) = C[\Phi(t)x(0_-) + \Phi(t)B * f(t)] + Df(t)$$

若系统输入个数为 m，下面定义 $m \times m$ 阶对角矩阵

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta(t) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta(t) \end{bmatrix} \quad (11\text{-}36)$$

由于 $\delta(t)$ 满足

$$\boldsymbol{\delta}(t) * f(t) = f(t)$$

因此，系统输出方程可写为

$$\begin{aligned} y(t) &= C[\Phi(t)x(0_-) + \Phi(t)B * f(t)] + D\delta(t) * f(t) \\ &= C\Phi(t)x(0_-) + [C\Phi(t)B + D\delta(t)] * f(t) \\ &= y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \end{aligned} \quad (11\text{-}37)$$

显然，零输入响应 $y_{zi}(t)$ 为

$$y_{zi}(t) = C\Phi(t)x(0_-) \quad t > 0 \quad (11\text{-}38)$$

零状态响应 $y_{zs}(t)$ 为

$$y_{zs}(t) = [C\Phi(t)B + D\delta(t)] * f(t) = h(t) * f(t) \quad (11\text{-}39)$$

其中

$$h(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t) \quad (11\text{-}40)$$

称为冲激响应矩阵。它是一个 $m \times n$ 的矩阵。

$$\boldsymbol{h}(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \cdots & h_{1m} \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n1}(t) & h_{n2} & \cdots & h_{nm}(t) \end{bmatrix} \quad (11\text{-}41)$$



冲激响应矩阵中的第 i 行第 j 列元素 $h_{ij}(t)$ 是当第 j 个输入信号 $f_j(t)=\delta(t)$，而其余输入信号均为零时，第 i 个输出信号 $y_i(t)$ 的零状态响应。

11.3.2　状态转移矩阵 $\Phi(t)$的计算

在用时域法求解状态空间方程时，需要用到状态转移矩阵 $\Phi(t)$。在时域范围内，状态转移矩阵 $\Phi(t)=\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ 常用的计算方法有：时域法和复频域法。

1. 时域法

时域法计算 $\Phi(t)$ 的方法有几种，这里主要介绍应用凯莱-哈密顿(Caley-Hamilton)定理计算 $\Phi(t)$。

在矩阵代数中，对 n 阶方阵 $\mathbf{A}$，若有非零 n 维列矢量 $\boldsymbol{x}$，标量 λ 满足方程式

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \tag{11-42}$$

则称 λ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值。

因为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}$$

所以式(11-42)可写为

$$\lambda\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}-\mathbf{A}\boldsymbol{x}=(\lambda\boldsymbol{I}-\mathbf{A})\boldsymbol{x}=0$$

由于 $x\neq 0$，故式中 $(\lambda\boldsymbol{I}-\mathbf{A})$ 行列式为零。令

$$p(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\mathbf{A})=0$$

上式可表示成

$$\begin{aligned}p(\lambda)&=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\mathbf{A})=C_n\lambda^n+C_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+C_1\lambda+C_0\\&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0\end{aligned} \tag{11-43}$$

其中，$p(\lambda)$ 是 λ 的多项式，称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式。$p(\lambda)=0$ 称为 $\mathbf{A}$ 的特征方程，它的根称为 $\mathbf{A}$ 的特征根。

根据凯莱-哈密顿定理可以证明：任意 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的矩阵函数 $f(A)$ 均可以表示成 $\mathbf{A}$ 的多项式，即

$$f(A)=\beta_0\boldsymbol{I}+\beta_1\mathbf{A}+\beta_2\mathbf{A}^2+\cdots+\beta_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} \tag{11-44}$$

对于矩阵指数函数，则有

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=\beta_0\boldsymbol{I}+\beta_1\mathbf{A}+\beta_2\mathbf{A}^2+\cdots+\beta_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} \tag{11-45}$$

【知识要点提醒】 根据 $\mathbf{A}$ 的特征根用下列方法确定系数。

(1) 若矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是不相等的单根，有

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=\beta_0+\beta_1\lambda_1+\cdots+\beta_{n-1}\lambda_1^{n-1}\\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t}=\beta_0+\beta_1\lambda_2+\cdots+\beta_{n-1}\lambda_2^{n-1}\\ \cdots\qquad\qquad\cdots\\ \mathrm{e}^{\lambda_n t}=\beta_0+\beta_1\lambda_n+\cdots+\beta_{n-1}\lambda_n^{n-1}\end{cases} \tag{11-46}$$

求解方程组可得出 n 个系数 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$。

（2）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根 λ 为相等的 γ 重根，有

$$\begin{cases} e^{\lambda t}=\beta_0+\beta_1\lambda+\cdots+\beta_{n-1}\lambda^{n-1} \\ \dfrac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}=\dfrac{d}{d\lambda}(\beta_0+\beta_1\lambda+\cdots+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}) \\ \quad\cdots\qquad\cdots \\ \dfrac{d^{\gamma-1}}{d\lambda^{\gamma-1}}e^{\lambda t}=\beta_0+\beta_1\lambda_n+\cdots+\beta_{n-1}\lambda_n^{n-1} \end{cases} \tag{11-47}$$

求解方程组可得出 n 个系数 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$。

【例 11.10】 若给定方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，求状态转移矩阵 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

【解题思路与技巧】 直接利用时域法求解。

解： 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$P(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\det\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & 2-\lambda\end{bmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

方程有两个不相等的实根 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$

故 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 可表示为

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\beta_0\boldsymbol{I}+\beta_1\boldsymbol{A}$$

求系数 β_0 和 β_1 有

$$e^{\lambda_1 t}=\beta_0+\beta_1\lambda_1 \qquad e^{\lambda_2 t}=\beta_0+\beta_1\lambda_2$$

代入 λ_1 和 λ_2，并解得

$$\beta_0=2e^t-e^{2t} \qquad \beta_1=e^{2t}-e^t$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}&=\beta_0\boldsymbol{I}+\beta_1\boldsymbol{A}=(2e^t-e^{2t})\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+(e^{2t}-e^t)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2e^t-e^{2t} & 0\\ 0 & 2e^t-e^{2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^{2t}-e^t & e^{2t}-e^t\\ 0 & 2e^{2t}-2e^t\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}e^t & e^{2t}-e^t\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. 复频域法

下面举例说明。

【例 11.11】 已知系统状态方程的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，求状态转移矩阵 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

【解题思路与技巧】 先将时域方程转换为复频域，然后求解。



解：$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=s\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s-2&0&0\\0&s-1&0\\0&0&s-3\end{bmatrix}$

其行列式 det 与伴随矩阵 adj 分别为

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}s-2&0&0\\0&s-1&0\\0&0&s-3\end{bmatrix}=(s-1)(s-2)(s-3)$$

$$\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}s-2&0&0\\0&s-1&0\\0&0&s-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(s-1)(s-2)&0&0\\0&(s-2)(s-3)&0\\0&0&(s-1)(s-2)\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-2}&0&0\\0&\frac{1}{s-1}&0\\0&0&\frac{1}{s-3}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{LT}^{-1}[\Phi(s)]=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}u(t)&0&0\\0&\mathrm{e}^{t}u(t)&0\\0&0&\mathrm{e}^{3t}u(t)\end{bmatrix}$$

11.3.3 系统响应的时域计算

【例 11.12】 给定系统状态空间方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}f \qquad y(t)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+[1]f(t)$$

已知系统的初始状态为 $x(0_-)=\begin{bmatrix}x_1(0_-)\\x_2(0_-)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，输入信号为 $f(t)=u(t)$。

求：(1) 状态转移矩阵 $\Phi(t)$。

(2) 系统状态方程的解 $x(t)$。

(3) 系统的输出响应 $y(t)$。

【解题思路与技巧】 用时域方法先解出 $\Phi(t)$，然后解出状态方程和输出方程。

解：状态空间方程中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{D}=[1]$$

(1) 求系统状态转移矩阵 $\Phi(t)$。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$P(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & -3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0\\-1 & \lambda+3\end{bmatrix}$$
$$=(\lambda+1)(\lambda+3)=0$$

方程有两个不相等的实根

$$\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=-3$$

故 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 可表示为

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\beta_0\boldsymbol{I}+\beta_1\boldsymbol{A}$$

求系数 β_0 和 β_1 有

$$e^{\lambda_1 t}=\beta_0+\beta_1\lambda_1 \qquad e^{\lambda_2 t}=\beta_0+\beta_1\lambda_2$$

代入 λ_1 和 λ_2，并解得

$$\beta_0=\frac{3e^{-t}-e^{-3t}}{2} \qquad \beta_1=\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{2}$$

因此

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}=\beta_0\boldsymbol{I}+\beta_1\boldsymbol{A}=\frac{3e^{-t}-e^{-3t}}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{2}\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & -3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}) & e^{-3t}\end{bmatrix}$$

(2) 系统状态方程的解 $x(t)$。

零输入响应 $x_{zi}(t)$ 为

$$x_{zi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)x(0_-)=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}) & e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t}\\\frac{1}{2}(e^{-t}+3e^{-3t})\end{bmatrix} \quad t>0$$

零状态响应 $x_{zs}(t)$ 为

$$x_{zs}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)B*f(t)=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}) & e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}*u(t)$$
$$=\begin{bmatrix}e^{-t}\\\frac{1}{2}(e^{-t}-3e^{-3t})\end{bmatrix}*u(t)=\begin{bmatrix}1-e^{-t}\\\frac{1}{6}(2-3e^{-t}+e^{-3t})\end{bmatrix} \quad t>0$$

因此，状态方程的解为

$$x(t)=x_{zi}(t)+x_{zs}(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\\frac{1}{2}(e^{-t}+3e^{-3t})\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-e^{-t}\\\frac{1}{6}(2-3e^{-t}+e^{-3t})\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{3}(1+5e^{-3t})\end{bmatrix} \quad t>0$$



（3）系统的输出响应 $y(t)$。

零输入响应 $y_{zi}(t)$ 为

$$y_{zi}(t)=C\Phi(t)x(0_-)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ \frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}) & e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\frac{3}{2}e^{-3t}\quad t>0$$

零状态响应 $y_{zs}(t)$ 为

$$\begin{aligned}x_{zs}(t)&=h(t)*f(t)=[C\Phi(t)B+D\delta(t)]*f(t)\\&=\left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ \frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}) & e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+[1]\delta(t)\right\}*u(t)\\&=\left[\delta(t)-\frac{1}{2}e^{-3t}\right]*u(t)=\frac{1}{6}(5+e^{-3t})\quad t>0\end{aligned}$$

故系统的输出响应 $y(t)$ 为

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\frac{3}{2}e^{-3t}+\frac{1}{6}(5+e^{-3t})=\frac{5}{6}(1+2e^{-3t})\quad t>0$$

11.3.4　连续时间状态方程的复频域响应

前面介绍了系统状态空间方程的时域求解，下面介绍系统状态方程的 S 域解法。所谓 S 域求解就是首先利用拉普拉斯变换将时域状态空间方程转换成复频域的代数方程，然后再求解代数方程，最后通过对结果取拉普拉斯逆变换，求得状态空间方程的时域响应。

设线性时不变系统的状态空间方程为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bf(t)\\y(t)=Cx(t)+Df(t)\end{cases}\tag{11-48}$$

式中，$x(t)$，$f(t)$ 和 $y(t)$ 均是标量。

对上式两边求拉普拉斯变换，可得

$$\begin{cases}sX(s)-x(0_-)=AX(s)+BF(s)\\Y(s)=CX(s)+DF(s)\end{cases}\tag{11-49}$$

由此可知

$$(s-A)X(s)=x(0_-)+BF(s)$$

即可得系统的状态方程的解为

$$\begin{aligned}X(s)&=(s-A)^{-1}x(0_-)+(s-A)^{-1}BF(s)\\&=\Phi(s)x(0_-)+\Phi(s)BF(s)\end{aligned}\tag{11-50}$$

式中，$\Phi(s)=(s-a)^{-1}$称为状态方程的预解矩阵。

【知识要点提醒】　对预解矩阵求拉普拉斯逆变换即可得状态转移矩阵

$$\Phi(t)\overset{LT}{\longleftrightarrow}\Phi(s)$$

系统输出方程的解为

$$Y(s)=C\Phi(s)x(0_-)+[C\Phi(s)B+D]F(s) \tag{11-51}$$

对复频域状态方程的解和输出方程的解求拉普拉斯逆变换即可得到时域状态方程的解和输出方程的解。

系统零输入响应为

$$Y_{zi}(s)=C\Phi(s)x(0_-)$$

系统零状态响应为

$$Y_{zs}(s)=[C\Phi(s)B+D]F(s)$$

由输出方程可以得到系统函数矩阵

$$H(s)=C\Phi(s)B+D$$

因此，系统零输入响应矩阵 $y_{zi}(t)$、零状态响应矩阵 $y_{zs}(t)$ 和冲激响应为矩阵 $h(t)$ 分别为

$$y_{zi}(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}Y_{zi}(s) \qquad y_{zs}(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}Y_{zs}(s) \qquad h(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}H(s)$$

【例 11.13】 给定系统状态空间方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}f \qquad y(t)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[1]f(t)$$

已知系统的初始状态为 $\boldsymbol{x}x(0_-)=\begin{bmatrix}x_1(0_-)\\ x_2(0_-)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$，输入信号为 $f(t)=u(t)$

求：(1) 状态转移矩阵 $\Phi(t)$。 (2) 冲激响应矩阵 $h(t)$。

(3) 系统的状态方程的解 $x(t)$。 (4) 系统的输出响应 $y(t)$。

【解题思路与技巧】 用复频域方法先解出 $\Phi(t)$，然后解出状态方程和输出方程，最后利用拉普拉斯逆变换求解。

解： 状态空间方程系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=[1]$$

(1) 状态转移函数 $\Phi(t)$。

$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ -1 & s+3\end{bmatrix}$$

其行列式 det 与伴随矩阵 adj 分别为

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}s+3 & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}=(s+1)(s+2)=s^2+3s+2$$

$$\text{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}s+3 & 0\\ 1 & s+1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\text{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}=\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix}s+3 & 0\\ 1 & s+1\end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

对 $\boldsymbol{\Phi}(s)$ 求拉普拉斯逆变换，得状态转移矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t}) & \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}$$

（2）冲激响应矩阵 $\boldsymbol{h}(t)$。

系统函数矩阵 $\boldsymbol{H}(s)$

$$\boldsymbol{H}(s) = \boldsymbol{C\Phi}(s)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [1] = 1 - \frac{1}{2(s+3)}$$

对 $H(s)$ 求拉普拉斯变换

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

（3）系统的状态方程的解 $x(t)$。

① 系统状态解的零输入分量 $x_{zi}(t)$

$$x_{zi}(s) = \boldsymbol{\Phi}(s)x(0_-) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{3}{s+3}\right) \end{bmatrix}$$

求拉普拉斯逆变换

$$x_{zi}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t} + 3\mathrm{e}^{-3t}) \end{bmatrix}$$

② 系统状态解的零状态分量 $x_{zs}(t)$

$$x_{zs}(s) = \Phi(s)\mathrm{B}F(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{s} - \dfrac{3}{s+1} + \dfrac{1}{s+3}\right) \end{bmatrix}$$

求拉普拉斯逆变换

$$x_{zs}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ \dfrac{1}{6}(2 - 3\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}) \end{bmatrix}$$

系统状态方程的解 $x(t)$ 为

$$x(t) = x_{zi}(t) + x_{zs}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{3}(1 + 5\mathrm{e}^{-3t}) \end{bmatrix} \quad t > 0$$

(4) 系统的输出响应 $y(t)$。

① 系统零输入响应为 $y_{zi}(t)$

$$Y_{zi}(s)=C\Phi(s)x(0_-)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{s+3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{s+3}\end{bmatrix}$$

求拉普拉斯逆变换

$$y_{zi}(t)=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

② 系统零状态响应为 $y_{zs}(t)$

$$\begin{aligned}Y_{zs}(s)&=[C\Phi(s)B+D]F(s)=H(s)F(s)\\&=\left[1-\frac{1}{2(s+3)}\right]\cdot\frac{1}{s}=\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\right)\right]\end{aligned}$$

求拉普拉斯逆变换

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{6}(5-\mathrm{e}^{-3t})u(t)$$

系统输出响应为

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\frac{5}{6}[1-2\mathrm{e}^{-3t}]u(t)$$

【例 11.14】 给定系统状态空间方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}f(t)\qquad y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

已知系统的初始状态和输入信号为

$$x(0_-)=\begin{bmatrix}x_1(0_-)\\ x_2(0_-)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\qquad f(t)=u(t)$$

求:(1) 状态转移函数 $H(s)$。　　(2) 系统的单位冲激响应 $h(t)$。

(3) 系统的输出响应 $y(t)$。

【解题思路与技巧】 方法同例 11.13。

解: (1) 状态转移函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=C\Phi(s)B+D$$

$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+2 & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}$$

其行列式 det 与伴随矩阵 adj 分别为

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}s+2 & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}=(s+1)(s+2)=s^2+3s+2$$

$$\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}$$



$$\Phi(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ 0 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

系统函数矩阵 $H(s)$ 为

$$H(s)=\boldsymbol{C}\Phi(s)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=[1\quad 0]\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ 0 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=[1\quad 0]\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+2}\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{s+2}$$

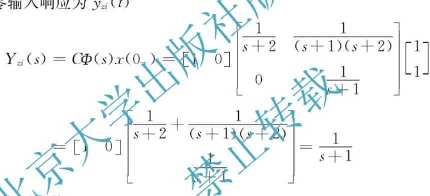
(2) 系统的单位冲激响应 $h(t)$。

对 $H(s)$ 求拉普拉斯变换，可得

$$h(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

(3) 系统的输出响应 $y(t)$。

① 系统零输入响应为 $y_{zi}(t)$



$$Y_{zi}(s)=C\Phi(s)x(0_-)=[1\quad 0]\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ 0 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$=[1\quad 0]\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\frac{1}{s+1}$$

求拉普拉斯逆变换

$$y_{zi}(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

② 系统零状态响应为

$$Y_{zs}(s)=[C\Phi(s)B+D]F(s)=H(s)F(s)$$

$$=\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)$$

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

③ 系统输出响应 $y(t)$

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\left[\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2t})\right]u(t)$$

【知识要点提醒】 综上所述，求解连续时间 LTI 系统状态空间方程的一般步骤如下。

(1) 确定系统状态变量。

通常可以选定系统中记忆元件作为状态变量，即选取独立电容电压和独立电感电流作为状态变量。对用系统框图或系统信号流图表示的模拟系统，选取积分器的输出作为状态

变量。

（2）用直接法或间接法列出系统的状态空间方程。

（3）计算状态转移矩阵

$$\Phi(t)=\mathrm{e}^{At}$$

或预解矩阵

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}$$

（4）求状态方程的解。

时域 $x(t)=x_{zi}(t)+x_{zs}(t)=\Phi(t)x(0_-)+\Phi(t)B*f(t)$

复频域 $x(s)=x_{zi}(s)+x_{zs}(s)=\Phi(s)x(0_-)+\Phi(s)BF(s)$

然后求拉普拉斯逆变换。

（5）计算冲激响应 $h(t)$。

计算冲激响应矩阵

$$h(t)=C\Phi(t)B+D\delta(t)$$

或系统函数矩阵

$$H(s)=C\Phi(s)B+D$$

（6）计算系统输出响应 $y(t)$。

计算系统输出响应的具体方法有两种。

方法 1：如果状态方程的解已经求出，可将它直接代入输出方程即可得到 $y(t)$。

方法 2：如果没有求出状态方程的解

时域 $y(t)=C\Phi(t)x(0_-)+h(t)*f(t)$

复频域 $Y(s)=C\Phi(s)x(0_-)+H(s)F(s)$

本章知识要点

1. 状态空间方程

（1）状态空间描述。

（2）状态空间方程的一般形式。

2. 连续时间系统状态方程的建立

（1）电路网络状态方程的直接建立。

（2）由微分方程建立系统状态空间方程。

（3）由系统函数建立系统状态空间方程

3. 连续时间系统状态空间方程的求解

（1）连续时间系统状态方程的响应。

（2）状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的计算。

① 时域法。②复频域法。

（3）系统响应的时域计算。

（4）状态方程的复频域响应。

习题 11

11.1　电路如图 11.10 所示，若以 $u_o(t)$ 为输出信号，试列出系统的状态方程和输出方程。

11.2　电路如图 11.11 所示，若以 $y(t)$ 为输出信号，试列出系统的状态方程和输出方程。

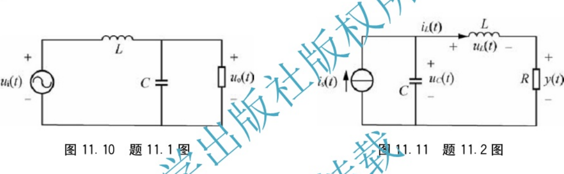


图 11.10　题 11.1 图　　图 11.11　题 11.2 图

11.3　电路如图 11.12 所示，试列出系统的状态方程和输出方程。

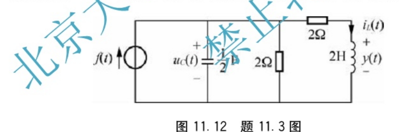


图 11.12　题 11.3 图

11.4　电路如图 11.13 所示，试列出系统的状态方程和输出方程。

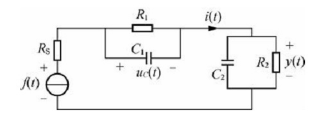


图 11.13　题 11.4 图

11.5　电路如图 11.14 所示，试列出系统的状态方程和输出方程。

11.6　系统微分方程为

$$y'''(t)+2y''(t)+3y'(t)+4y(t)=5f(t)$$

写出系统的状态方程和输出方程。

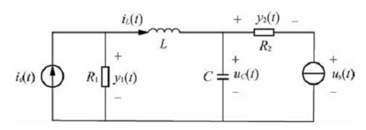


图 11.14 题 11.5 图

11.7 系统微分方程为

$$y'''(t)+5y''(t)+y'(t)+2y(t)=f''(t)+2f(t)$$

写出系统的状态方程和输出方程。

11.8 已知连续时间系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{4s^3+16s^2+23s+13}{(s+1)^2(s+2)}$$

写出状态变量方程和输出方程。

11.9 已知连续时间系统的框图如图 11.15 所示。

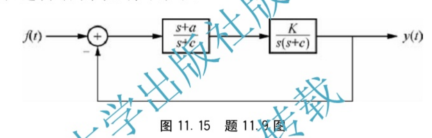


图 11.15 题 11.9 图

写出系统的状态方程和输出方程。

11.10 已知连续时间系统的框图如图 11.16 所示。

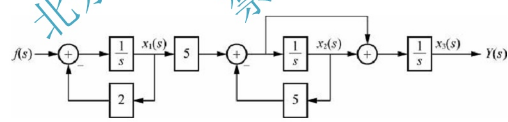


图 11.16 题 11.10 图

写出系统的状态方程和输出方程。

11.11 已知系统状态方程的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$，求状态转移矩阵 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

11.12 已知系统状态方程的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}$，求状态转移矩阵 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

11.13 已知系统状态方程的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$



试用两种方法求状态转移矩阵 $\Phi(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

11.14　已知系统的状态方程为 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_1(0_-)\\ x_2(0_-)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$

用两种方法求状态方程的解。

11.15　已知系统的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=[1\quad 3\quad 1],\boldsymbol{D}=[0]$$

系统的输入信号 $f(t)=u(t)$，初始条件 $\begin{bmatrix}x_1(0_-)\\ x_2(0_-)\\ x_3(0_-)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$

求：(1) 状态转移矩阵 $\Phi(t)$。

(2) 系统的状态方程的解 $x(t)$。

(3) 系统的输出响应 $y(t)$。

11.16　已知系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}f(t),\ y(t)=[1\quad -1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+f(t)$$

系统的输入信号 $f(t)=u(t)$，初始条件 $\begin{bmatrix}y_1(0_-)\\ y_2(0_-)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$。

求：(1) 状态转移矩阵 $\Phi(t)$。

(2) 系统的状态方程的解 $x(t)$。

(3) 系统的输出响应 $y(t)$。